

Tesis de Posgrado

Turbulencia de plasma en la magnetósfera de los pulsars

Verga, Alberto Daniel

1984

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Verga, Alberto Daniel. (1984). Turbulencia de plasma en la magnetósfera de los pulsars. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1842_Verga.pdf

Cita tipo Chicago:

Verga, Alberto Daniel. "Turbulencia de plasma en la magnetósfera de los pulsars". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1984.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1842_Verga.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

TURBULENCIA DE PLASMA EN LA MAGNETOSFERA
DE LOS PULSARS

Autor: Alberto Daniel Verga
Director: Constantino Ferro Fontán

Lugar de Trabajo: Instituto de Astronomía y
Física del Espacio
(Becario CONICET)

Tesis presentada para optar al título de
Doctor en Ciencias Físicas
- 1984 -

Reg. 1842

- 1842 -
y. 2

INDICE

RESUMEN

I.	INTRODUCCION	4
II.	TURBULENCIA FUERTE DE LANGMUIR EN UN PLASMA NO RELATIVISTA	27
	2.1 Fenómenos No-Lineales en Plasmas	27
	2.2 Ondas de Langmuir en un Plasma Isótropo	31
	2.3 Ecuaciones de Schrödinger No-Lineal con Campo Autoconsistente	34
	2.4 Colapso de Langmuir	38
	2.5 Espectro de la Turbulencia de Langmuir	441
	2.6 Solitones de Langmuir	44
	2.7 Aplicaciones a Plasmas Solares	49
	2.8 Plasmas Relativistas	56
III.	SOLITONES EN UN PLASMA DE ELECTRONES Y POSITRONES MAGNETIZADO. METODO KBM	68
	3.1 Introducción. El Decaimiento de las Ondas de Langmuir en Ondas de Alfvén	68
	3.2 Metodo KBM	72
	3.3 Ecuaciones Básicas	80
	3.4 Relaciones de Dispersión y Procesos de Tres Ondas	82
	3.5 Las Interacciones Modulacionales. Ecuaciones de Onda No-Lineales	94
	3.6 Solitones	103
IV.	TURBULENCIA FUERTE DEL PLASMA DE LA MAGNETOSFERA DE LOS PULSARS	107
	4.1 Introducción. Método KT	107
	4.2 Derivación de las Ecuaciones $S_3 - \phi$	113
	4.3 Formalismo Lagrangiano	128
V.	TEORIA DE LA TURBULENCIA Y LOS MECANISMOS DE RADIOEMISION COHERENTE	142
	5.1 El Espectro de la Turbulencia	142
	5.2 Los Mecanismos de Radiación	155
VI.	CONCLUSIONES	165
	AGRADECIMIENTOS	175
	REFERENCIAS	176
	FIGURAS	187

RESUMEN

Se deriva, a partir de las ecuaciones de Vlasov-Maxwell, una ecuación de Schrödinger no-lineal con un campo autoconsistente ($S3-\phi$) que describe las interacciones modulacionales de las ondas de Langmuir en presencia de un campo de ondas de Alfvén, para el plasma de la magnetosfera de los pulsars. Las interacciones modulacionales conducen al plasma a un estado de turbulencia fuerte cuyos elementos básicos son los solitones, solución particular de $S3-\phi$. Las interacciones entre los solitones se estudian desarrollando un formalismo lagrangiano. También se estudian soluciones auto-similares que describen el colapso de los solitones en presencia de una fuente externa de plasmones. Se encuentra que en el caso de turbulencia bien desarrollada, via ergodización por colapso y fusión de solitones, el espectro en el rango inercial es un espectro de potencia con índice -2 . La jerarquía de escalas espaciales tiene un punto de ruptura, la longitud de coherencia, a partir de la cual la energía turbulenta decae exponencialmente y es disipada por amortiguamiento Landau y otros procesos no-lineales. La longitud de coherencia que resulta es de algunas decenas de centímetros lo cual esta de acuerdo con las observaciones. El espectro de la turbulencia coincide cualitativamente con las propiedades de la señal de los pulsars, infiriéndose que la coherencia de la radiación emitida es de banda ancha. Se discuten además algunos mecanismos radiativos. Específicamente, se analiza la amplificación no-lineal de ondas de Alfvén, proceso que resulta suficientemente efectivo como para producir una equipartición de la energía en la turbulencia de Langmuir y en la de Alfvén, si la región de emisión se encontrara alejada de las cáscaras polares. Se estudia, finalmente, la radiación producida durante la interacción de los haces de partículas ultrarrelativistas con el campo eléctrico estocástico de los solitones.

I. INTRODUCCION

En 1932 poco después del descubrimiento del neutrón, Lev Landau predijo teóricamente la posible existencia de las estrellas de neutrones [70][71]. Utilizando la teoría newtoniana y una ecuación de estado para un gas de fermiones, Landau calculó la estructura de las estrellas de neutrones. Oppenheimer y Volkoff (1939)[88], refinaron los cálculos de Landau, y propusieron un modelo basado en las ecuaciones de Einstein. Encontraron configuraciones estables para estrellas de masas $(1/3)M_{\odot} < M_{*} < (3/4)M_{\odot}$ (M_{\odot} masa solar), con radios de alrededor de 10 km. En la actualidad, a partir del desarrollo de la física nuclear, es posible calcular detalladamente la estructura de las estrellas de neutrones [109][111].

La posible vinculación de las estrellas de neutrones con las supernovas fue predicha por Baade y Zwicky (1934), "las supernovas representan la transición de estrellas ordinarias en estrellas de neutrones, las cuales en su etapa final consisten en paquetes extremadamente compactos de neutrones"[8].

Durante la década del 60, extraordinariamente prolífica en descubrimientos astronómicos, se anticiparon algunas ideas relacionadas con la posibilidad de observar las estrellas de

neutrónes, basadas esencialmente en efectos producidos por su fuerte campo gravitatorio. Zeldovich (1964) [133] propuso la acreción de material interestelar (gas y polvo) como un mecanismo de emisión de radiación X (fuera de sistemas binarios). Un desarrollo de estas ideas, y un análisis de los posibles fenómenos asociados a las pulsaciones de las estrellas de neutrones y sus efectos observables, pueden encontrarse en un artículo de Wheeler de 1966 [130].

Una idea nueva surgió en 1967 cuando Pacini [89] investiga la fuente de energía que excita la nebulosa del Cangrejo. Esta es el remanente de una supernova observada en el año 1054 por astrónomos chinos, la cual es posible observar en la actualidad. La emisión visible de esa nebulosa puede explicarse como radiación sincrotrón de electrones relativistas, sin embargo la fuente de energía para excitar la nebulosa y acelerar los electrones era desconocida en 1967. Pacini sugirió, siguiendo una idea de Woltjer [131], la existencia de fuertes campos magnéticos en las estrellas de neutrones. Si el momento magnético es perpendicular al eje de rotación, la estrella de neutrones se convierte en una fuente de radiación electromagnética (magnética dipolar) cuya frecuencia es la frecuencia de rotación de la estrella (indetectable directamente). Este trabajo de Pacini pronto tuvo un cierto soporte experimental.

El descubrimiento de los pulsars, a pesar del trabajo hecho

sobre las propiedades de las estrellas de neutrones, fue un acontecimiento completamente inesperado. Quizá lo más notable es que las estrellas de neutrones fueron observadas por primera vez en ondas de radio de alta frecuencia (cerca de los 100 MHz). A. Hewish y sus colaboradores (1967) [54], como parte de una investigación dirigida a analizar la estructura angular de radiofuentes compactas mediante la observación del centelleo producido por las irregularidades del medio interestelar, detectaron una serie de pulsos de duración 0.3 s con un período extraordinariamente estable (una parte en 10^7) de un segundo. La ausencia de paraleje y corrimiento Doppler, indicaron que se trataba de un objeto astrofísico (no perteneciente al sistema solar). En un primer momento se pensó que esos pulsos provenían de una enana blanca o una estrella de neutrones pulsante. Si bien con el período observado no se podía descartar que se tratara de oscilaciones de una enana blanca, cuyos períodos son superiores a un segundo, el descubrimiento del pulsar de la nebulosa del Cangrejo [111] con un período de 0.033 s, hizo desechar esa posibilidad. En cambio las oscilaciones de las estrellas de neutrones son demasiado rápidas e inestables a grandes amplitudes.

La asociación entre los pulsars y las estrellas de neutrones fue establecida por Gold (1968) [42]. Tal como lo había anticipado Pacini [89-90], una estrella de neutrones magnetizada que rotara rápidamente perdería momento angular debido a la emisión de radiación de baja frecuencia, efecto que pudo ser

medido rápidamente. El decrecimiento en el período de rotación es común a todos los pulsars, hoy se conocen más de 320, e implican campos magnéticos del orden de 10^{12} Gauss (!) en la superficie de la estrella de neutrones.

Los pulsars (reseñas de las observaciones se encuentran en los artículos [27-28][49][80] [100][109] y [117]) emiten fundamentalmente en radiofrecuencia, en la banda de 100 MHz a 1 GHz. Los dos pulsars asociados a remanentes de supernovas, del Cangrejo (PSR 0532) y de Vela (PSR 0833), emiten además en altas frecuencias, radiación gamma y X (Fig. 1.1). En particular el pulsar del Cangrejo emite en el óptico (Fig. 1.2). La temperatura de brillo de la radioemisión está en el rango de 10^{26} a 10^{31} °K. Evidentemente estas temperaturas no representan la energía cinética media de las partículas, sino que dan la pauta de la existencia de algún mecanismo radiativo coherente.

El espectro de radio, como se ve en la Fig. 1.3, sigue en general una ley de potencias, con índice espectral de alrededor de -2, para frecuencias menores que 1 GHz [108]. Algunos pulsars muestran cortes de baja frecuencia, del orden de 100 MHz, aparentemente intrínsecos de la fuente. Mientras que por encima de 1 GHz, la mayoría de los pulsars tienen un punto de ruptura a partir del cual el índice espectral aumenta, es decir que la intensidad de la radiación decrece bruscamente para frecuencias superiores al GHz. Este corte de alta frecuencia es una característica del mecanismo de coherencia de la radiación. Para

longitudes menores que cierta longitud característica (de algunas decenas de centímetros) la radiación deja de ser coherente y por lo tanto el flujo de radio baja rápidamente. La existencia de un espectro de potencia sugiere que una distribución de escalas espaciales está presente, como ocurre en un plasma turbulento. El hecho mismo de la coherencia de la radiación implica un apartamiento completo de las condiciones de equilibrio termodinámico, y la necesidad de alguna forma de organización de las partículas que emiten. Esta organización puede ser espacial, formando racimos (mecanismo tipo antena), o puede producirse en el espacio de las velocidades, en el cual se desarrolla una inversión de población (mecanismo maser).

La densidad y energía media del plasma en la región de emisión, pueden inferirse de las observaciones, suponiendo que la frecuencia de la radiación está alrededor de la frecuencia del plasma. Kaplan y Tsytovich [61][62] estimaron que la densidad es $n=10^{10} \text{ cm}^{-3}$ y la energía $\beta=10^3 \text{ mc}^2$. Por otra parte la región de emisión debe situarse relativamente cerca de la superficie del pulsar [27], a una distancia de unos $10^2 R_*=10^8 \text{ cm}$, donde el campo magnético es $B_* < 10^{5.6} \text{ Gauss}$. En el caso de PSR 0809+74 existe evidencia indirecta [9] de que la región de emisión estaría ubicada a aproximadamente unos 10^4 cm , donde el campo magnético sería de unos 10^3 Gauss solamente.

La suposición de que la emisión se realiza a frecuencias cercanas a la del plasma, implica una dependencia de la

frecuencia de la radiación con la posición de la fuente, dado que la densidad del plasma decrece con el radio. En efecto, existen fuertes evidencias observacionales de un mapeo frecuencia-distancia al pulsar [9][102][27-28], como por ejemplo la dependencia con la frecuencia del ancho del perfil promedio, así como de la separación de sus componentes. El perfil promedio se obtiene sumando los pulsos individuales.

La señal de los pulsars consiste en una serie de pulsos, de intensidad muy irregular, que se repiten con un período típicamente de un segundo. Este es el período de rotación de la estrella y es extraordinariamente estable, por lo cual puede calcularse con una precisión de 1 en 10^{13} . La duración del pulso es mucho menor que el período de rotación, y está entre 10^{-3} s y 10^{-4} s. En contraste con la enorme variabilidad de los pulsos individuales, en algunos pulsars existe hasta un 75% de periodos nulos, sin emisión de radiación, el promedio sobre algunos cientos de pulsos resulta una forma estable (Fig. 1.4). Este pulso promedio es característico de cada pulsar [117] (Fig. 1.5). La estabilidad del perfil promedio es indicativa de la preponderancia del campo magnético sobre el plasma radiante, lo cual a su vez sustenta la hipótesis de que la radioemisión proviene de una región cercana a los polos magnéticos.

Existen además de los pulsos, estructuras temporales más finas, los micropulsos [19][51], cuyos tiempos característicos son del orden de 10^{-5} s a 10^{-3} s. Los micropulsos, constituyentes

de los pulsos, tienen frecuentemente una estructura cuasiperiódica [19], y aparecen como variaciones temporales inherentes al proceso de emisión. Esta cuasiperiodicidad observada en los micropulsos puede interpretarse en términos de oscilaciones no-radiales de la estrella de neutrones (cuyos periodos de 1 ms coinciden con los cuasiperíodos observados), en las que intervienen modos de oscilación cercanos y batidos [19].

La riqueza del comportamiento de la señal de los pulsars no se agota en las variaciones de intensidad y en la multiplicidad de escalas de tiempo involucradas, sino que alcanza a los fenómenos vinculados a la polarización de la radiación emitida [27][28][100] [80][49]. Mientras a cortas escalas de tiempo la variación del ángulo de polarización y los parámetros de Stokes es aleatoria, el promedio sobre muchos pulsos es estable al igual que el pulso promedio (Fig. 1.6). Las propiedades de polarización dan información sobre la geometría de la región donde se produce la señal. En el pulso promedio el ángulo de polarización varía lentamente con la fase de rotación. Esta variación puede explicarse satisfactoriamente con el modelo del "cono hueco" de Radhakrishnan y Cooke [100] (Fig. 1.7). En general, en el pulso promedio aparece cierto grado de polarización circular, a veces hasta un 30%, aunque en los pulsos individuales es frecuente encontrar 100% de polarización lineal.

El estado de polarización varía muy poco durante el micropulso, en particular el ángulo de posición parece no rotar

en los micropulsos, contrariamente a lo que sucede en el pulso promedio o en los pulsos simples. Esto indica que los micropulsos son variaciones temporales reales y no efectos geométricos, como sucede en el caso de los pulsos simples donde la rotación del ángulo de posición es debida a la variación de la posición de la fuente, la cual barre la línea de visión [28][113] (ver también [13] y [20]).

La emisión de los pulsars es de banda ancha. Tanto los pulsos como los micropulsos estan correlacionados a muy diferentes frecuencias. Sin embargo, los micropulsos desaparecen por encima del corte de 1 Ghz. Existe evidencia de que la intensidad del pulso proviene de dos contribuciones, una de bajas frecuencias (hasta cientos de MHz) y otra que domina a altas frecuencias. A bajas frecuencias el pulso se forma de subpulsos asociados a la microestructura. Estos subpulsos a su vez tienen la propiedad de derivar en fase, apareciendo sucesivamente a tiempos más tempranos. A la deriva de los subpulsos estan vinculadas periodicidades secundarias (no relacionadas con el período de rotación) Fig. 1.8. A altas frecuencias, el pulso estaría formado por subpulsos que no derivan, de larga duración. Es entonces posible la existencia de dos mecanismos de emisión de radiación, estando el de baja frecuencia ligado a la radioemisión coherente y a las fluctuaciones temporales inherentes a las condiciones físicas imperantes en la magnetosfera.

Uno de los problemas observacionales de mayor relevancia

teórica, es aquel acerca de la disquisición entre la naturaleza de banda ancha o de banda angosta del mecanismo de emisión coherente, es decir es la coherencia de banda ancha o angosta? [10][27][20][102]. Si la energía de las ondas del plasma es confinada a solo unos cuantos modos, la coherencia sería de banda angosta, dado que la amplificación ocurriría a frecuencias de ondas electromagnéticas en un entorno de la frecuencia del plasma. Si, por el contrario, el plasma se encuentra en un estado turbulento, de tal manera que la densidad de energía de la radiación es tan grande que la radiación perturba la distribución de las partículas, excitándose simultáneamente una gran cantidad de modos, y estableciendo una jerarquía de escalas espaciales, la amplificación de ondas electromagnéticas sería de banda ancha.

La señal de los pulsars muestra variaciones erráticas en el tiempo y en frecuencia, y debe por lo tanto, ser estudiada estadísticamente. Experimentalmente esas variaciones pueden ser caracterizadas por la función de autocorrelación de la intensidad. Rickett [101][26] propuso un modelo para determinar la función de autocorrelación. La señal de radio $I(t)$ puede ser representada por un proceso estocástico $n(t)$ que resulta de la superposición incoherente de elementos coherentes básicos, cuya escala de tiempo característica es de ~ 1 ns, y este proceso estocástico de banda ancha es modulado por una función lentamente variable $a(t)$, la cual contiene las características de los micropulsos y los subpulsos

$$I(t) = a(t)n(t)$$

Las observaciones confirman este modelo, encontrándose que $n(t)$ es ruido blanco gaussiano [27][51][26]. Usando el teorema del límite central se puede entonces inferir que en un intervalo de $\sim 1 \mu s$, la señal del pulsar recibe contribuciones de un gran número de emisores coherentes independientes. Considerando que la escala característica de coherencia es 1 ns, ese número puede ser del orden de $1 \mu s / 1 ns = 10^3$ [28].

Si bien los subpulsos y micropulsos son fluctuaciones de banda ancha, surge la pregunta si sus constituyentes coherentes son emisores de banda ancha, asociados a la turbulencia del plasma, o son de banda angosta, resultantes de la superposición de ondas bien definidas. No existe en la actualidad una respuesta definitiva, observacionalmente, de esta cuestión, aunque sí existe evidencia en favor de la coherencia de banda ancha [9][27][20]. En el caso de un mecanismo de emisión de banda angosta deberían observarse profundas variaciones de la señal con la frecuencia para un dado micropulso. En efecto, dado que el plasma continuamente se reorganiza al fluir hacia afuera, hacia regiones de menor densidad, el grado de coherencia debería variar en función del radio, es decir, de la frecuencia [27][49]. Este efecto no es observado, por el contrario la intensidad de los micropulsos esta bien correlacionada sobre frecuencias bien separadas [9][51].

Dos ramas de la física están vinculadas al fenómeno de los pulsars. La física nuclear estudia la estructura de la estrella de neutrones, las propiedades de la materia a altas densidades ($\rho > 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$). La electrodinámica y la física del plasma estudian la magnetosfera y los mecanismos de emisión. Según Ginzburg [39], después del descubrimiento de los pulsars, pensó que el análisis del mecanismo de radioemisión sería mucho más fácil que incluso la elección entre los modelos de enanas blancas o de estrellas de neutrones. El desarrollo siguiente de la teoría fue enteramente distinto. La observación de pulsars de corto período, así como el progreso teórico en relación a la ecuación de estado para material nuclear, permitieron identificar a los pulsars con las estrellas de neutrones y escrudiñar su interior, desarrollándose un modelo mas o menos completo de su estructura. Por el contrario, los modelos de magnetosfera y de los mecanismos de radiación chocaron con grandes dificultades. Tal vez debido a que no existe en la actualidad una teoría satisfactoria de la turbulencia fuerte de plasmas. Y mucho menos en las extremas condiciones físicas de la magnetosfera de los pulsars (modelos de magnetosfera se encuentran en [3][4][5][40][45][65][80][104][105][109][114])

El primer problema planteado en relación a la emisión de los pulsars fue la posibilidad de la existencia misma de una atmosfera alrededor de la estrella de neutrones. Por ejemplo el modelo de Pacini [89-90] suponía que el exterior de la estrella de neutrones estaba vacío, lo cual evidentemente es incompatible

con la radioemisión observada, la cual debe ser producida por un plasma relativista denso. Sin embargo la posibilidad de una magnetosfera no aparecía clara. En efecto, calculemos la escala de altura de una hipotética envoltura gaseosa. Con los parámetros típicos de una estrella de neutrones, masa $M_{\star}=1 M_{\odot}$, radio $R_{\star}=10^6$ cm y temperatura superficial $T=10^6$ °K, la escala de altura para los protones es aproximadamente de 1 cm. Ningún efecto observable puede provenir de esa atmosfera. Sin embargo, en este análisis se han despreciado la influencia del fuerte campo magnético y la rotación de la estrella de neutrones.

Goldreich y Julian (1969) [45] demostraron que una solución de vacío para la región que rodea a una estrella de neutrones rotante es inestable. Consideraron por simplicidad un rotador alineado, con el vector velocidad angular paralelo al momento magnético, lo cual no es en realidad un pulsar, aunque puede suponerse que cualitativamente los resultados serán válidos para un rotador con pequeña oblicuidad. El campo magnético dipolar, induce fuera de la estrella un campo eléctrico cuadrupolar cuyo orden de magnitud será, cerca de la superficie

$$E \approx \frac{\Omega R_{\star} B_0}{c} \sim 10^8 \text{ cgs},$$

para un pulsar de período $P=1$ s. Por lo tanto, la fuerza eléctrica sobre un electrón supera en alrededor de 10^{12} veces la fuerza gravitatoria, mientras que la energía eléctrica es del orden de

$$e\phi \approx e\Omega R_{\star}^2 B_0 / c \sim 10^{16} \text{ eV}.$$

Como consecuencia de la existencia de una componente del campo eléctrico paralela al campo magnético cerca de la superficie de la estrella de neutrones, es posible la emisión de partículas cargadas, y la formación de una magnetosfera. De acuerdo al signo del campo eléctrico serán acelerados electrones o iones, por lo cual habrá regiones de cargas separadas. En el caso de un alineamiento del momento magnético y la rotación, en los polos del pulsar se deberían acelerar electrones (Fig. 1.9). Ahora bien, los electrones que dejan la superficie, y que en un principio tienen un impulso transversal despreciable dado que son acelerados según las líneas de campo magnético, emitirán radiación de curvatura. Como lo señaló Sturrock (1971) [114], la radiación gamma emitida por los electrones es capaz de disparar una cascada de creación de pares electrón-positrón. Por otra parte, la corrotación del plasma solo es posible hasta el llamado cilindro de luz, superficie sobre la cual la velocidad tangencial del plasma sería igual a la velocidad de la luz c , y que tiene entonces un radio de $R_{CL} = c/\Omega$. Esto significa que las líneas de campo magnético de las regiones polares serán abiertas. La misma región polar esta delimitada por la última línea dipolar cerrada, que toca tangencialmente al cilindro de luz. Consiguientemente en las regiones magnéticas polares, que son las regiones relevantes para el proceso de radioemisión, se forma un plasma ultrarrelativista de electrones y positrones, cuyas características deben ser inferidas de un cálculo consistente de los campos y el plasma, teniendo en cuenta las peculiaridades del proceso de creación de pares y el hecho de que el pulsar solo

funciona como rotador oblicuo. Hasta el presente este programa no ha sido llevado a cabo, por lo que existen distintos modelos de la magnetosfera de los pulsars. Entre los más aceptados actualmente está el de Ruderman y Sutherland (1975) [104]. Ya hemos mencionado que por las líneas abiertas de las regiones polares escapan partículas cargadas al no poderse mantener la corrotación más allá del cilindro de luz. Sin embargo los iones no pueden escapar libremente de la superficie, como en su momento lo supuso Sturrock, y compensar la carga perdida para mantener la neutralidad. Esto se debe al enorme campo magnético presente, en el cual los iones forman cadenas moleculares con una altísima energía de ligadura. Son necesarios campos eléctricos superiores a los 10 V/cm para extraer los iones, campos que solo son alcanzables en pulsars de muy corto período.

En una estrella de neutrones con los vectores momento dipolar y rotación antiparalelos, de los polos deberían escapar cargas positivas, lo cual en general no es posible por el efecto de polimerización. Esta incapacidad de extraer iones conduce a la formación de un gap (brecha) en el cual se desarrolla toda la caída de potencial. Dentro del gap $E \cdot B$ es distinto de cero (Fig. 1.10). Cuando la diferencia de potencial alcanza unos 10^{12} V, el gap se hace inestable frente a la producción de una avalancha de creación de pares electrón-positrón. La chispa de electrones y positrones provee la carga necesaria para cerrar el circuito mediante el flujo de electrones hacia la superficie, destruyendo el gap (Fig. 1.11). Una vez agotado el flujo de electrones el

gap se regenera, con lo cual se arriba a un proceso de enriquecimiento continuo de la magnetosfera. Incluso los positrones acelerados por el campo eléctrico paralelo alcanzan energía suficiente para crear una nueva generación de pares. Es importante señalar que como consecuencia del mecanismo de formación de pares, a partir de radiación gamma de curvatura en un fuerte campo magnético externo, las partículas creadas tienen una gran dispersión de impulsos paralelos a \underline{E}_0 , aunque no poseen momento transversal al campo, dado que radían su energía por emisión sincrotrón [4][125].

En definitiva, en las regiones polares de una estrella de neutrones se forma un plasma caliente de electrones y positrones, cuyos parámetros son típicamente [13][104]

$T \approx 1 \text{ MeV}$ temperatura, $\beta \approx mc^2 / T \sim 10^{-3}$,

$n \approx 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ densidad. Este plasma está a su vez surcado por haces de partículas ultrarrelativistas (positrones en el modelo de Ruderman y Sutherland [104]) con

$\gamma_b \approx 10^6$ factor de Lorentz, $n_b / n \approx 10^{-3}$,

$\epsilon_b = n_b \gamma_b mc^2$ energía de los haces. La función de distribución de impulsos del plasma de electrones y positrones es altamente anisótropa debido a la pérdida de impulso transversal por emisión de sincrotrón en el ultrafuerte campo magnético imperante en las cercanías de la superficie de las estrellas de neutrones. Las condiciones de contorno a las cuales está sujeto ese plasma magnetosférico varían profundamente en escalas de tiempo de $1. \mu\text{s}$, como consecuencia del mecanismo de inyección de plasma, producido

por descargas y decaimiento de radiación gamma en pares de partículas y antipartículas.

La formación y destrucción por descargas (chispas) de las barreras de potencial en las regiones polares, características del modelo de Ruderman y Sutherland, ofrece la posibilidad de explicar el rico comportamiento temporal observado. La deriva de los subpulsos puede interpretarse como resultado de la deriva de la posición donde se produce la chispa. Por otra parte, las oscilaciones de la estrella de neutrones podrían afectar la estructura del gap, dando lugar a la cuasiperiodicidad de algunos micropulsos. O, independientemente de las oscilaciones, si las condiciones para redisparar la descarga no se recuperan inmediatamente, y se produce un cierto retraso para que la chispa tenga lugar nuevamente, aparecería la estructura cuasiperiódica de los micropulsos.

Una limitación inherente al modelo de Ruderman y Sutherland es que solo es aplicable a estrellas de neutrones cuyo momento magnético es antiparalelo al vector de rotación, y no existe ninguna razón a priori para suponer que no existen pulsars del sexo opuesto. Arons y Scharlemann [5][3] consideraron el rotador oblicuo semicuantitativamente y encontraron que en la región polar donde las líneas de campo magnético (en principio multipolar) se curvan hacia el eje de rotación, es factible el desarrollo de gaps en los cuales $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$. Es decir que también en aquellos pulsars desde cuyos polos puedan extraerse electrones,

existirá una región de aceleración donde se crean pares de electrones y positrones (Fig. 1.12). A diferencia del modelo de Ruderman y Sutherland, en el cual el gap está sujeto a un régimen no-estacionario, Arons y Scharlemann, basandose en la estabilidad del perfil promedio, buscaron modelos estacionarios, renunciando de este modo a la posibilidad de explicar las variaciones observadas. Sin embargo, un modelo estacionario es físicamente admisible si es estable frente a perturbaciones, tanto en las condiciones de contorno como en las distribuciones de las magnitudes físicas que lo caracterizan. La estabilidad del modelo de Arons y Scharlemann es dudosa [134], por lo cual se puede pensar que la magnetosfera esta sujeta a condiciones esencialmente no-estacionarias, o que solo aquellas estrellas de neutrones con

$$\Omega \cdot m < 0, \quad E \cdot B \neq 0$$

existen.

Como ya dijimos, el problema de los mecanismos de radioemisión, es el que históricamente ha presentado mayores dificultades. Estas dificultades nacen por un lado de la falta de un modelo de magnetosfera consistente que establezca con precisión las condiciones físicas en las cuales se desarrolla el proceso de emisión, y por el otro, se deben a una insuficiencia teórica. En efecto, hacia los años 70 no existía un panorama claro acerca de las propiedades dielectricas (modos lineales de oscilación) de un plasma relativista [75], y de la interacción haz-plasma. Mucho menos, se habían estudiado regímenes con la

frecuencia de ciclotrón mucho más alta que la frecuencia del plasma, ni se habían considerado las peculiaridades de un plasma de electrones y positrones.

Si bien existen variados mecanismos de producción de radiación electromagnética en un plasma, el punto fundamental del cual hay que dar cuenta es el de la extraordinaria temperatura de brillo (para algunos micropulsos es del orden de 10^{31} °K), es decir de la coherencia de la radiación. En un principio se establecieron dos líneas de trabajo, aquellos que proponían mecanismos tipo antena caracterizados por un agrupamiento espacial de las partículas [104][23], y aquellos que proponían mecanismos tipo maser [41][40], para los cuales la amplificación espontánea de la radiación se origina en una inversión de población en la distribución de impulso y energía. En el mecanismo de antena la coherencia se mantiene siempre que las dimensiones lineales del racimo de partículas sea menor que la longitud de onda emitida, en caso contrario hay interferencia entre las distintas partes del racimo [13][20]. En el mecanismo maser intervienen, en cambio, procesos típicos de la física no-lineal de plasmas, como en el modelo de Ginzburg et al. [41] en el cual proponen la generación de ondas de Langmuir (ondas longitudinales de plasma) por la inestabilidad haz-plasma y la posterior conversión en ondas transversales por interacciones onda-onda u onda-partícula. Esos procesos dan lugar a un coeficiente de reabsorción negativo, y por lo tanto a un crecimiento (inicial) exponencial de la intensidad de la

radiación. Más recientemente se han estudiado con detalle las inestabilidades del plasma magnetosférico, especialmente en la aproximación hidrodinámica, y su posible relevancia en la generación de radiación coherente [6-7][52-53] [56][64][79].

La dificultad principal con los mecanismos de antena es la cuestión de la estabilidad de los racimos. Aún una pequeña dispersión de impulsos destruiría la coherencia de la radiación emitida. Como el propio mecanismo de generación del plasma conduce a funciones de distribución del tipo ley de potencia en una gama amplia de impulsos o energías, la estabilidad de los racimos es imposible. Incluso las inestabilidades, como la de dos haces, resulta demasiado lenta para haces monoenergéticos [13][79][85][56], para la formación de los racimos, como se sugiere en el modelo de Ruderman y Sutherland. Por otra parte, los mecanismos tipo maser no fueron elaborados sobre la base de modelos realistas de magnetosfera, no considerándose la preeminencia del campo magnético, o refiriéndose a plasmas de electrones e iones.

A partir de la segunda mitad de la década del 70 fueron propuestas algunas teorías de la radioemisión de los pulsars basadas en los conceptos propios de la teoría de la turbulencia fuerte de Langmuir [103][50]. En particular, se consideró la importancia de los solitones [22][24][63][94] [128][129]. Los solitones son ondas no-lineales localizadas, perfectamente estables, que surgen del desarrollo de la inestabilidad

modulacional de las ondas de Langmuir. Como resultado de perturbaciones de baja frecuencia (batidos) las ondas de Langmuir tienden a concentrarse en paquetes separados [132], produciéndose rarefacciones de densidad donde consecuentemente el campo electrostático crece. Los solitones así formados son capaces de emitir, por ejemplo, radiación de curvatura al igual que racimos de partículas, al viajar por las líneas de campo magnético, radiación que es coherente hasta una longitud de onda comparable con el ancho del soliton [22]. También resultan modulacionalmente inestables las ondas electromagnéticas [94][24].

El problema de la radioemisión de los pulsars es encarado en esta Tesis desde el punto de vista de la física del plasma. Es interesante notar la similitud entre algunos fenómenos de la magnetosfera de las estrellas de neutrones y algunos fenómenos solares o incluso planetarios. Son por ejemplo, muchos los paralelos entre la magnetosfera de Jupiter con los pulsars [80]. La radioemisión solar producida durante los estallidos de tipo III (burst III [115][68][98]) involucra procesos semejantes a los que eventualmente generan la radioemisión de los pulsars, aunque por supuesto, existen diferencias fundamentales. El campo magnético superfuerte y el plasma de electrones y positrones son características exclusivas de las estrellas de neutrones. En primer lugar en los estallidos de tipo III, en la región coronal de la fulguración (flare), los perfiles de intensidad de microondas muestran estructuras temporales de 10 a 100

milisegundos con una temperatura de brillo de 10^{15}°K , por lo cual la radiación es coherente (la temperatura cinética es del orden de los 10^6°K). La emisión de tipo III proviene ciertamente de interacciones no-lineales entre el haz de electrones acelerado durante la fulguración y el plasma circundante [92][44][46]. El papel de la inestabilidad modulacional en la estabilización de los haces es claro [93][91][32]. Este es un efecto característico de la turbulencia fuerte de Langmuir. También en la magnetosfera de los pulsars es posible la generación de ondas de Langmuir debido a la inestabilidad haz-plasma (haces calientes), y la excitación de turbulencia de Langmuir. Uno de los objetivos de este trabajo es justamente el estudio de la turbulencia fuerte de Langmuir en las condiciones de la magnetosfera de los pulsars. También, la turbulencia fuerte puede tener importancia en el mecanismo de emisión de radiación. En el caso de los estallidos de tipo III se ha estudiado la emisión de radiación en la frecuencia del plasma y su segunda armónica (que es predominante) de solitones [33] y durante el colapso de cavitones [44].

Los estallidos de tipo III son un ejemplo bien estudiado de interacción haz-plasma en un plasma astrofísico y los fenómenos a los que da lugar esta interacción son ilustrativos e indicativos para un estudio del sistema haz-plasma en la magnetosfera de los pulsars. Por otra parte las similitudes no pueden llevarse muy lejos. En efecto, en la turbulencia de Langmuir es esencial la existencia de las oscilaciones iónico-acústicas, ausentes en un

plasma de electrones y positrones, por lo cual la dinámica de generación y desarrollo de la turbulencia puede ser enteramente diferente. Por otra parte, en el campo magnético superfuerte las partículas pierden su impulso transversal dando lugar a una función de distribución esencialmente unidimensional, por lo cual los solitones, que son inestables frente a perturbaciones transversales [77], en la magnetosfera de los pulsars resultan estables.

La organización de la tesis es como sigue. En II. se introducen algunos conceptos de la turbulencia fuerte de Langmuir en un plasma de electrones e iones (en ausencia de campo magnético externo). Se discutirán las propiedades de un plasma relativista de electrones y positrones, su relación de dispersión, la excitación y turbulencia cuasilineal de las ondas de Langmuir, así como la posibilidad del decaimiento de las ondas de Langmuir en ondas de Alfvén.

En III. y IV. se exponen los métodos perturbativos que permiten obtener las ecuaciones no-lineales de onda que describen la turbulencia fuerte en la magnetosfera de los pulsars, objeto principal de la tesis. En primer lugar se utiliza el método KBM (Krilov, Bogoliubov y Mitropolsky) para un primer estudio de la modulación e interacción con ondas de Alfvén de las ondas de Langmuir. A continuación, se expone el método de Tsytovich que permite discutir los distintos procesos no-lineales involucrados así como los efectos disipativos. Se deducen las soluciones tipo

solitón y se presenta el formalismo Lagrangiano, con el cual se estudian las interacciones entre solitones.

En V. se estudia el espectro de la turbulencia, basándose en un modelo de turbulencia de solitones, suponiendo que la ergodicidad proviene de los procesos de colapso de solitones y por procesos de fusión de solitones. Mediante métodos semicuantitativos se establecen las propiedades del espectro de la turbulencia. Se discuten además mecanismos de emisión de radiación, como la amplificación no-lineal de ondas de Alfvén, y la radiación de partículas que colisionan con solitones.

Finalmente se comparan algunos de los resultados de la teoría con las observaciones y las propiedades de la radioemisión de los pulsars.

II. TURBULENCIA FUERTE DE LANGMUIR EN UN PLASMA NO RELATIVISTA

2.1 FENOMENOS NO-LINEALES EN PLASMAS

En un plasma, donde el potencial de interacción de las partículas es el coulombiano, existe un gran número de modos de oscilación. Cuando los tiempos característicos de estos modos son más cortos que el tiempo promedio entre colisiones, se habla de modos o fenómenos colectivos [58]. Estos modos colectivos son quizá la propiedad distintiva de los plasmas respecto de los fluidos, los cuales se describen mediante las ecuaciones hidrodinámicas. Las interacciones dominantes en un plasma dejan de ser las colisiones entre partículas (potenciales de corto alcance) y son en cambio, las interacciones entre las partículas y los campos electromagnéticos autoconsistentes.

En general tanto los plasmas de laboratorio como los plasmas espaciales están sujetos a una constante entrega de energía, frecuentemente en forma de campos electromagnéticos externos, radiación o haces de partículas, que por lo tanto deben disipar. En estas condiciones se excitan en el plasma modos colectivos, que a su vez están asociados a diversas inestabilidades. El desarrollo de estas inestabilidades conduce al crecimiento y aparición de fuertes campos eléctricos en el seno del plasma. La

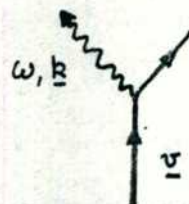
limitación de estas inestabilidades se da a través de mecanismos no-lineales. Son estos mecanismos no-lineales de interacción, como las interacciones partícula-onda, onda-onda, o en otro régimen la aparición de movimientos no-lineales como los solitones, los que llevan al plasma a un estado turbulento y a través de los cuales se disipa la energía suministrada al plasma [121-122][123] [35][31].

Pueden diferenciarse los regímenes débil (cuasilineal) y fuerte de la turbulencia de plasmas. Fundamentalmente estos regímenes se distinguen por el hecho de que en el estado cuasilineal las propiedades dispersivas del plasma (que determinan los modos de oscilación lineales) se ven poco alteradas, por lo cual se puede hablar de ondas bien definidas. Mientras que en el estado fuerte de la turbulencia la permitividad dieléctrica es sustancialmente modificada [123][103].

Veamos con más detalle el mecanismo de las interacciones colectivas en un plasma [62][35][31]. Una carga en el seno del plasma produce una nube de polarización a su alrededor, cuyo tamaño característico es la longitud de Debye. Si la partícula se mueve a una velocidad mayor que la velocidad de fase de la perturbación, esa nube de polarización se desprende de la carga, emitiéndose la energía usada en polarizar el plasma. Este proceso es un mecanismo de interacción tipo Cherenkov: una carga con movimiento uniforme emite radiación. La conservación de la

energía en este proceso elemental se puede escribir como

$$\omega = \underline{k} \cdot \underline{v}$$



(1)

donde ω y \underline{k} son la frecuencia y el vector de onda de la onda y \underline{v} la velocidad de la partícula. El proceso inverso fue descubierto por Landau (amortiguamiento Landau [72]) y consiste en que una partícula que viaja con la velocidad de fase de una onda absorbe continuamente energía de su campo eléctrico, acelerándose. En presencia de un campo magnético con

$$\omega_B = eB / mc$$

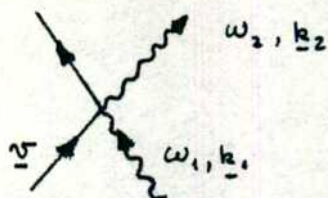
la frecuencia de ciclotrón, la interacción de ciclotrón satisface

$$\omega - l\omega_B = \underline{k} \cdot \underline{v}, \quad l = 0, \pm 1, \dots$$

Las interacciones Cherenkov y ciclotrón son lineales, quedan completamente descritas dada la relación de dispersión, más específicamente dada la parte imaginaria de la relación de dispersión.

Otro tipo de interacción es la dispersión de ondas por las partículas del plasma, para la cual se satisface

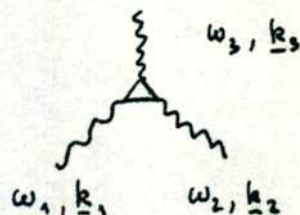
$$\omega_1 - \omega_2 = (\underline{k}_1 - \underline{k}_2) \cdot \underline{v} \quad (2)$$



este es un proceso no-lineal, la corriente es cuadrática en el campo eléctrico. Cuando una onda incide sobre la nube de Debye de un ión es dispersada a expensas de la energía térmica del ión. En este proceso la onda incidente puede transformarse en otra de distinta clase, siempre que dadas las relaciones de dispersión, se satisfaga la conservación de la energía (2.2). Si la onda incide sobre un electrón además de la respuesta de la nube de polarización se produce una onda por interacción Compton, en antifase, por lo cual se produce interferencia y un desvanecimiento de la onda dispersada. En un plasma de electrones y positrones la cancelación puede ser total.

Finalmente, otro de los procesos elementales es la interacción de tres ondas. Una partícula sujeta al campo eléctrico de dos ondas, digamos de frecuencias ω_1 y ω_2 , sufrirá aceleraciones y desaceleraciones que conducirán a la emisión de una tercer onda de frecuencia $\omega_1 + \omega_2$ ó $\omega_1 - \omega_2$,

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad \underline{k} = \underline{k}_1 + \underline{k}_2$$



(3)

Este es un mecanismo no-lineal, en el cual la corriente es de segundo orden en el campo eléctrico.

2.2 ONDAS DE LANGMUIR EN UN PLASMA ISOTROPO

En ausencia de un campo magnético externo, un plasma no relativista posee cuatro tipos de ondas. En la región de altas frecuencias los plasmones transversales (t) y longitudinales (l) u ondas de Langmuir y en la región de bajas frecuencias las ondas iónico-acústicas (s) y plasma-iónicas [81][58]. (Fig. 2.1). La relación de dispersión para las ondas de Langmuir es [62]

$$\omega = \omega_{pe} + \frac{3}{2} \omega_{pe} d_e^2 k^2, \quad \omega_{pe}^2 = 4\pi e^2 n_e / m_e, \quad (4)$$

donde $d_e = v_{Te} / \omega_{pe} = (T_e / 4\pi e^2 n_e)^{1/2}$ es la longitud de Debye de los electrones, n_e y T_e son respectivamente la densidad y la temperatura (en ergios) y ω_{pe} la frecuencia del plasma de los electrones, v_{Te} es su velocidad térmica. Para frecuencias mucho mayores que la frecuencia del plasma ω_{pe} , los plasmones transversales se transforman en ondas electromagnéticas. Las ondas iónico-acústicas son no dispersivas,

$$\omega = c_s k, \quad c_s = (T_e / m_i)^{1/2} = \omega_{pi} d_i, \quad (5)$$

donde c_s es la velocidad del sonido iónico, ω_{pi} y d_i la frecuencia del plasma y longitud de Debye de los iones

$$\omega_{pi}^2 = 4\pi e^2 n_i / m_i, \quad d_i = (T_i / 4\pi e^2 m_i)^{1/2} = (T_i / T_e)^{1/2} d_e, \quad (6)$$

n_i y T_i son su densidad y temperatura.

Las ondas de Langmuir pueden ser excitadas en un plasma atravesado por haces de partículas energéticas [81], por medio de interacción Cherenkov. Un plasma con una población de partículas no térmicas de alta energía es inestable, se desarrollan las inestabilidades haz-plasma. La generación de ondas de Langmuir en un cierto rango más o menos ancho de números de onda, donde la velocidad de fase de la onda es menor que la velocidad de la luz, conduce al plasma a un estado turbulento. Como se deduce inmediatamente de su relación de dispersión, las ondas de Langmuir no pueden decaer en ondas del mismo tipo

$$\omega^l \neq \omega_1^l + \omega_2^l. \quad (7)$$

Las interacciones mas importantes son la dispersión con iones (y eventualmente electrones)

$$l+i \rightarrow l+i, \quad (8)$$

y el proceso de tres ondas, de decaimiento de una onda de Langmuir en otra onda de Langmuir más una onda iónico-acústica

$$l \rightarrow l+s. \quad (9)$$

Todos estos procesos tienden a disminuir el numero de onda de las ondas de Langmuir, por lo cual la energía depositada en el plasma por los haces de partículas, tiende a confinarse alrededor de $k=0$, donde por otra parte las ondas longitudinales no sufren amortiguamiento Landau (su velocidad de fase es mayor que la de la luz). El espectro de la turbulencia es entonces no

estacionario (Fig. 2.2), produciéndose una condensación a bajos números de onda [62][103]. La producción del condensado de Langmuir muestra la insuficiencia de la descripción cuasilineal de la turbulencia, y surge inmediatamente la duda sobre la estabilidad de ese condensado, y la necesidad de considerar otras interacciones y fenómenos no-lineales.

2.3 ECUACIONES DE SCHRODINGER NO-LINEALES CON CAMPO AUTOCONSISTENTE

Las ondas de Langmuir son ondas electrostáticas, pueden interpretarse como pequeños condensadores cuyas paredes cargadas oscilan. Estos condensadores son rarefacciones de densidad donde el campo eléctrico es grande. Este campo eléctrico puede a su vez, modificar los parámetros termodinámicos del medio, cambiando por lo tanto las propiedades dieléctricas del sistema. En efecto, la presencia de ondas de alta frecuencia ejerce en el plasma una fuerza ponderomotriz de baja frecuencia [73], presión de radiación, la cual produce una modificación en la densidad [92]

$$p = nT + \frac{|E|^2}{16\pi} \quad (10)$$

Si la respuesta del plasma es local $\delta p = 0$, y entonces

$$\frac{\delta n}{n} \approx - \frac{|E|^2}{16\pi nT} \quad (11)$$

con lo cual la relación de dispersión para las ondas longitudinales se modifica de la siguiente manera

$$\omega = \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} d_e^2 k^2 + \frac{\delta n}{2n} \right) \quad (12)$$

En las rarefacciones de densidad se concentran las ondas de Langmuir haciendo crecer la fuerza ponderomotriz, que a su vez,

repele los electrones. Si la acción de esta fuerza, llamada también fuerza de estricción, es suficientemente lenta ($\tau \ll \omega_p^{-1}$ es un tiempo característico de su variación) los iones siguen el movimiento de los electrones, aumentándose la rarefacción de densidad y el número de plasmones atrapados. La inestabilidad frente a estas perturbaciones de baja frecuencia de las ondas de Langmuir de pequeño número de onda se denomina inestabilidad modulacional [58][103]. En rigor, se ve que la respuesta de los iones no puede ser estrictamente local, sino que la velocidad de propagación será la velocidad del sonido iónico-acústico. Por lo tanto se forman en el seno del plasma cavidades donde las ondas de Langmuir quedan atrapadas. Este proceso lleva al plasma a un estado de turbulencia fuerte, dado que sus propiedades dieléctricas se modifican sustancialmente por la presencia de campos eléctricos de gran amplitud, $\delta n/n \gtrsim 3\phi_e^2 k^2$, contribuyendo con un término que supera la dispersión lineal. El problema fundamental es ahora el determinar si las interacciones modulantes son capaces de invertir el sentido del flujo de energía en el espectro de la turbulencia, pasando a un régimen en el cual la energía de las ondas se transporta hacia grandes números de onda, donde eventualmente, existen mecanismos eficientes de disipación no colisional como el amortiguamiento Landau. Para encarar este problema es necesario plantear las ecuaciones dinámicas que describen la evolución de la modulación $E(r,t)$ del campo eléctrico $E(r,t)e^{-i\omega_p t}$. La forma más simple de derivar esas ecuaciones es a partir de la relación de dispersión, considerando el corrimiento no-lineal de la

frecuencia

$$(\omega - \omega_{pe} - \frac{3}{2} \omega_{pe} d_e^2 k^2) E_{k,\omega} = \omega_{pe} \frac{\delta n}{2n} E_{k,\omega}, \quad (13)$$

y pasar a la representación de coordenadas

$$\omega \rightarrow i \partial_t, \quad k \rightarrow -i \nabla,$$

y usando el hecho de que el campo es electrostático

$$E_{k,\omega} = \frac{k}{k} \cdot E_{k,\omega} / k,$$

con lo cual obtenemos

$$\nabla \cdot (i \partial_t + \frac{3}{2} \frac{v_{Te}^2}{\omega_{pe}} \nabla^2) E = \frac{\omega_{pe}}{2} \nabla \cdot \left(\frac{\delta n}{n} E \right), \quad (14)$$

(convenimos la notación $\partial_t = \partial/\partial t$ para las derivadas). Si la no-linealidad es estrictamente local y nos limitamos al caso unidimensional obtenemos la ecuación de Schrödinger no-lineal S3

$$(i \partial_t + \frac{3}{2} \frac{v_{Te}^2}{\omega_{pe}} \partial_{xx}) E + \frac{\omega_{pe}}{32\pi n T} |E|^2 E = 0 \quad (15)$$

donde $\partial_{xx} = \partial^2/\partial x^2$. Si por el contrario, se tiene en cuenta la velocidad finita de propagación de las perturbaciones de la densidad, la ecuación (2.14) estará acoplada con una ecuación para δn , que será una ecuación de onda con un término de fuente vinculado a la fuerza de estricción

$$(\partial_{tt} - c_s^2 \nabla^2) \delta n = \nabla^2 \frac{|E|^2}{4\pi m_i} \quad (16)$$

Las ecuaciones (2.14)-(2.16) fueron derivadas por Zakharov [132] en 1972. Sobre la base de las ecuaciones de Zakharov es posible estudiar la turbulencia fuerte de Langmuir. En primer lugar se deduce que existe un umbral para el disparo de las interacciones modulantes. Cuando la densidad de energía turbulenta W excede el valor

$$W/nT_e > (\Delta k)^2 d_e^2 \quad (17)$$

el estado del plasma es inestable frente a perturbaciones modulantes, Δk es el rango de números de onda de un paquete de ondas de Langmuir. Evidentemente, dado que la energía turbulenta se va acumulando en la región $k \approx 0$, y que en las interacciones (2.8) y (2.9) se conserva el número de plasmones mientras que la frecuencia permanece prácticamente constante, la condición (2.17) siempre se satisface.

2.4 COLAPSO DE LANGMUIR

Veamos ahora las propiedades de las soluciones de las ecuaciones de Zakharov (que llamaremos también SZ-6n). Examinemos los movimientos con simetría esférica mucho más lentos que la velocidad del sonido, la ecuación apropiada es entonces

$$i\partial_t E + \partial_r (r^{-2} \partial_r) r^2 E + |E|^2 E = 0 \quad (18)$$

para lo cual hemos convenido en la adimensionalización siguiente

$$r = \frac{r}{d_0} \sqrt{\frac{\mu}{3}}, \quad t = t \frac{\mu \omega_{pe}}{2}, \quad \delta n = \frac{\delta n}{n\mu}, \quad (19)$$

$$E = \frac{E}{\sqrt{4\pi n_0 T_e \mu}}, \quad \mu = m_e / m_i$$

r es la coordenada radial, μ es el cociente de masas entre electrones e iones. La ecuación (2.18) conserva el número de plasmones y la energía [38][132][77], como puede deducirse utilizando un formalismo lagrangiano

$$N = 4\pi \int_0^\infty r^2 dr |E|^2 \quad (20)$$

$$H = 4\pi \int_0^\infty r^2 dr \left\{ |\partial_r E|^2 + 2r^{-2} |E|^2 - \frac{1}{2} |E|^2 \right\} \quad (21)$$

Con el objeto de discutir la evolución de paquetes de onda localizados, hemos visto que la inestabilidad modulacional tiende

a formar cavernas donde coalescen las ondas de Langmuir, es útil introducir una función de peso (función de "distribución" de los plasmones) $|E|^2/N$ como resulta natural de acuerdo a (2.20) [132][43], y calcular el promedio espacial de, por ejemplo, el ancho de esos paquetes de onda

$$\langle \delta r^2 \rangle = \frac{4\pi}{N} \int_0^\infty r^2 dr r^2 |E|^2 \quad (22)$$

cuya evolución según (2.18) es

$$\partial_{tt} \langle \delta r^2 \rangle = 3H/N - \frac{4\pi}{N} \int_0^\infty r^2 dr |\partial_r E|^2 - \frac{2\pi}{N} \int_0^\infty dr |E|^2 \langle 3H/N \rangle \quad (23)$$

y por lo tanto

$$0 < \langle \delta r^2 \rangle < \frac{3H}{N} t^2 + C_1 t + C_2 ; \quad C_1, C_2 = \text{const.} \quad (24)$$

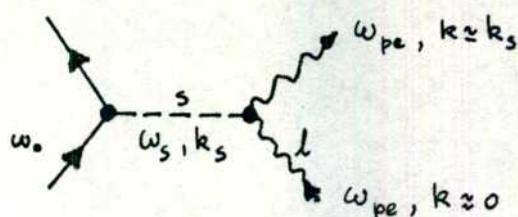
Si $H < 0$, después de un tiempo finito $\tau = t - t_0$, la parte derecha de (2.24) será negativa, es decir que a $t = t_0$ se alcanza una singularidad, el tamaño del paquete tiende a cero en un tiempo finito. Este fenómeno, conocido como el colapso de ondas de Langmuir, o colapso de cavitones fue descubierto por Zakharov [132], y constituye un principio de solución al problema de la condensación de Langmuir. En efecto, el hecho de que los cavitones tiendan a disminuir de tamaño implica un flujo de la energía turbulenta hacia grandes números de onda, dirección contraria a la del estado cuasilineal de la turbulencia de Langmuir.

Por supuesto, el fenómeno del colapso no queda completamente descrito por (2.24), dado que ese análisis adolece de algunas simplificaciones, (i) si bien inicialmente el colapso puede ser lento, pasado cierto tiempo los movimientos serán sónicos o supersónicos, por lo cual es necesario relajar la hipótesis de no-linealidad local; (ii) la simetría esférica es modulacionalmente inestable, es posible la formación de una jerarquía de perturbaciones modulantes similares a la jerarquía de vórtices en un líquido.

2.5 ESPECTRO DE LA TURBULENCIA DE LANGMUIR

El descubrimiento del colapso de Langmuir motivó la realización de experimentos numéricos [95][87][44][77], con el objeto principal de demostrar si la transferencia de energía en la turbulencia de Langmuir excitada por ejemplo, por medio de haces de partículas o bombeando sobre el plasma radiación laser a frecuencia $\omega \approx \omega_{pe}$, es contraria a la predicha por la teoría cuasilineal, y ocurre hacia pequeñas longitudes de onda. Estos experimentos numéricos encontraron que en efecto la turbulencia fuerte de Langmuir esta caracterizada por una transferencia de energía en el espectro de la turbulencia, dirigido hacia la región de disipación.

Un ejemplo de interacciones en presencia de una onda bombeada sobre el plasma es la inestabilidad de dos haces oscilante [93], íntimamente vinculada con la inestabilidad modulacional [86]. Es en realidad un proceso de cuatro ondas en el cual interviene un campo "virtual". La onda bombeada $\omega_0 \approx \omega_{pe}$ excita una fluctuación de densidad — onda iónico-acústica con $\omega = \omega_s \ll \omega_{pe}$, $k \approx k_s$ — la cual dispersa una onda longitudinal de Langmuir ω_{pe} , $k \ll k_s$. La onda de Langmuir dispersada tendrá una frecuencia $\omega \approx \omega_{pe}$, pero una velocidad de fase mucho menor que la inicial debido a que $k \ll k_s \approx k'$



(25)

Lo interesante de este proceso es que involucra una transferencia de la energía de las ondas de Langmuir hacia regiones con $k \approx k_e^{-1}$, donde es eficiente el amortiguamiento Landau, y es contrario al sentido de la turbulencia cuasilineal de los procesos $l \rightarrow l+s$ y $l+i \rightarrow l+i$.

La vía de la inestabilidad paramétrica de excitación de la turbulencia de Langmuir, es decir de la evolución de un plasma iluminado por un fuerte campo de radiación, ha sido extensamente estudiado numericamente [47][30][59] [119-120], debido en parte a su interés en la fusión por confinamiento inercial. En esta situación se excitan primeramente algunos modos [29] que interactúan no-linealmente entre sí (por ejemplo como en (2.25)), ensanchando el espectro de la turbulencia. Este espectro responde frecuentemente a una ley de potencias cuyo índice espectral es alrededor de -2 [47][30][95]. Sin embargo cuando el nivel de excitación es bajo $|E_k|^2 / 8\pi n T_e \ll 1$ un apartamiento del espectro de potencia es observado [95], el cual sigue en cambio una ley del tipo $\text{sech}^2 k$.

Cuando la turbulencia es excitada por un haz de partículas de alta energía, se excitan simultáneamente en el plasma un gran número de modos, en la región de interacción partícula-onda. La

evolución hacia la turbulencia fuerte es en este caso muy distinta a la de las inestabilidades paramétricas, debido a que primeramente existe una etapa cuasilineal durante la cual las ondas de Langmuir se condensan alrededor de $k=0$ hasta que se sobrepasa el umbral para las interacciones modulantes. La interacción haz-plasma es importante para los experimentos de fusión debido a que conduce a un rápido calentamiento del plasma. En el régimen de turbulencia fuerte y considerando consistentemente las inestabilidades de dos haces y de Buneman, excitada por la corriente de retorno, se encuentra un espectro de potencia con índice espectral -2 [118].

2.6 SOLITONES DE LANGMUIR

Las ecuaciones S3, o S3- δ n poseen terminos dispersivos y terminos no-lineales. Los efectos de la dispersión y de la no-linealidad sobre un paquete de ondas son opuestos. Mientras la dispersión tiende a diluir el paquete, ensanchándolo y disminuyendo su amplitud, la no-linealidad tiende a aguzar y romper la onda. Cuando estos efectos se equilibran es posible la formación de ondas localizadas de gran amplitud, los solitones. Precisamente la inestabilidad modulacional tiende a formar paquetes aislados de ondas de Langmuir.

Ahora bien, se puede pensar que los solitones son una clase muy especial de soluciones de las ecuaciones diferenciales no-lineales, e incluso que debido a esa no-linealidad, la colisión de los solitones entre sí los destruiría, repartiéndose la energía irreversiblemente sobre los distintos grados de libertad (hipótesis ergodica). Esta hipótesis no fue confirmada al estudiar numericamente la ecuación modelo de Korteweg-de Vries, que describe las ondas de gravedad en un canal de baja profundidad [107][77][58]. Es más, se puede demostrar que cualquier perturbación inicial (de amplitud finita) evoluciona hasta formar un arreglo de solitones. Estos solitones resultan estables, y sus interacciones los dejan inalterados, colisiones

elásticas.

Efectivamente, las ecuaciones S3 y S3- δn unidimensionales tienen soluciones tipo soliton. Sea $\xi = x - Vt$ y $E \rightarrow 0$ para $\xi \rightarrow \pm\infty$, entonces [107][77]

$$E = E_0 \operatorname{sech} k_0 \xi e^{-i(\Omega t - Kx)}, \quad (26)$$

V es la velocidad con la que se mueve el soliton de ancho k_0^{-1} y amplitud E_0 , además

$$\Omega = \frac{V^2}{4} - \frac{E_0^2}{2(1-V^2)}, \quad K = V/2, \quad k_0 = E/\sqrt{2}(1-V^2)^{1/2}, \quad (27)$$

(se ha usado la adimensionalización (2.19)). La fluctuación de densidad δn es, a su vez

$$\delta n = -\frac{|E|^2}{1-V^2} = -\frac{E_0^2}{1-V^2} \operatorname{sech}^2 k_0 \xi, \quad (28)$$

(Fig. 2.3).

El comportamiento de los solitones de Langmuir fue estudiado analítica y numéricamente [38][77] [95][1][127]. Fueron también observados experimentalmente [2][17][25][112]. Tal vez el punto más importante es que en el marco de las ecuaciones S3- δn , es decir teniendo en cuenta las ondas iónico-acústicas, un paquete de ondas inicial de gran amplitud evoluciona emitiendo ondas sonoras en un solitón. La primera etapa de la turbulencia puede describirse entonces, como un arreglo (unidimensional) de solitones [29][95]. Los solitones a su vez interactúan

inelásticamente [1] pudiendose producir fusiones entre solitones. En el espacio de Fourier las fusiones representan un transporte de energía hacia grandes numeros de onda, dado que el ancho de los solitones disminuye mientras aumenta su amplitud. Este proceso, típico de la turbulencia fuerte de Langmuir se acelera con el colapso de los solitones, dando lugar a la formación de una jerarquía de escalas espaciales y por lo tanto a un espectro de potencias en la región inercial de la turbulencia [106][37]. Esta región inercial se sitúa entre la región de números de onda pequeños donde se alimenta la turbulencia y la zona de disipación $k \approx d_0^{-1}$, donde es efectiva la interacción onda-partícula.

En contraste, en el marco de la ecuación S3, no se ha podido demostrar analíticamente, ni se ha observado numéricamente, que de un paquete de ondas arbitrario se forme un solitón [77][107]. Esta ecuación es insuficiente para describir la turbulencia fuerte de Langmuir, pues resulta por consiguiente esencial la existencia de un campo (virtual) de baja frecuencia como las fluctuaciones de densidad no locales, tanto para la formación de los solitones como para el establecimiento de un flujo de energía turbulenta hacia la región de disipación. Los solitones de la ecuación S3 interactúan elásticamente, por lo cual la energía no se redistribuye entre los distintos grados de libertad del sistema.

Por otra parte, el espectro $\text{sech}^2 k$ observado en algunos experimentos numéricos [95][30] es consistente con el hecho de

que a bajos niveles de turbulencia se generan solitones bien separados y correlacionados con rarefacciones de densidad. En esta situación el espectro es el de un soliton ($\text{sech } x \rightarrow \text{sech } k$).

La descripción de la turbulencia fuerte de Langmuir como un gas de solitones si bien cualitativamente permite comprender muchos fenómenos, tiene también grandes limitaciones,

(i) los solitones de Langmuir son inestables frente a perturbaciones transversales, por lo que en tres dimensiones aparecen efectos nuevos, como el colapso. Este efecto en experimentos numéricos es inducido por una fuente de energía que alimenta constantemente la turbulencia [36][29],

(ii) en el régimen turbulento los solitones interactúan fuertemente perdiendo su individualidad,

(iii) es necesaria una teoría que contemple consistentemente los procesos de interacción cuasilineales con las interacciones modulantes y los efectos cinéticos.

Intentos de formular una teoría de la turbulencia fuerte de Langmuir existen, algunos basados en las ecuaciones de Zakharov (modelos fluidísticos) y en modelos de la turbulencia en líquidos [135-138], o en el grupo de renormalización [139-140]; otros se basan en una teoría estadística planteada a partir de las ecuaciones cinéticas [123][103].

Experimentos de laboratorio han demostrado la existencia de los solitones de Langmuir. En los experimentos de Antipov et al.

[2] se excitan en un plasma magnetizado ($\omega_B > \omega_{pe}$) ondas de Langmuir ya sea con ondas electromagnéticas de radiofrecuencias o con haces de partículas. Se observa que las ondas de Langmuir colapsan (fuerza ponderomotriz) hasta formar solitones estables correlacionados con rarefacciones de densidad en acuerdo cualitativo con la teoría. Bond [17] encontró que el crecimiento de ondas de Langmuir (inestabilidad haz-plasma) se correlaciona con la aparición de un solitón alargado sobre las líneas de campo magnético, verificando resultados anteriores de Christiansen et al. [25]. En el experimento de Bond se observa también la aparición de poblaciones de partículas supratérmicas de alta energía.

Es importante destacar la comprobación experimental de que en un plasma magnetizado como resultado de la inestabilidad haz-plasma se forman solitones estables, acompañados de un cierto nivel de ondas iónico-acústicas e ion-ciclotrón [17][25], localizadas en la región del solitón. Estos experimentos sustentan la hipótesis de que los solitones, que son inestables en tres dimensiones, se estabilizan en presencia de campos magnéticos suficientemente fuertes.

2.7 APLICACIONES A PLASMAS SOLARES

Los conceptos de la turbulencia fuerte de Langmuir han provocado una profunda revisión en la aplicación de la física del plasma a los procesos solares y espaciales [50]. Ejemplos de esto son los estallidos de tipo III [98][115-116] y la radiación kilométrica auroral terrestre [34][57][99].

En los estallidos de tipo III electrones relativistas ($v \approx c/3$) atraviesan el plasma coronal y el viento solar, produciendo radioemisión a la frecuencia local del plasma y a su segunda armónica -- en general la emisión en $2\omega_{pe}$ es dominante ---.

La teoría cuasilineal de la interacción haz-plasma predice la generación de ondas de Langmuir y la formación simultánea de una meseta en la función de distribución [123] con lo cual se satura la inestabilidad. Este efecto no se observa en los estallidos de tipo III, por el contrario el haz de partículas viaja prácticamente a velocidad constante a través del viento solar, lo que significa que de alguna manera se suprime la fuerte interacción onda-partícula. El mecanismo de este desacople entre el haz y el plasma fue sugerido por Papadopoulos en 1974 [93] y está basado en efectos debidos a la turbulencia fuerte de plasma. Una vez alcanzado el umbral de las interacciones modulantes

$(W/nT > (kd_e)^2)$ las oscilaciones de Langmuir y las fluctuaciones iónico-acústicas son inestables, por lo cual se produce una transferencia de energía fuera de la región de resonancia con el haz [91][46][32]. Este transporte de la energía de los modos resonantes puede realizarse como consecuencia de la inestabilidad de dos haces oscilante [91][46], o por colapso directo de las ondas de Langmuir [44], finalmente se establece un régimen estacionario donde la alimentación de larga longitud de onda producida por el haz se compensa con la disipación por el colapso de las oscilaciones y el amortiguamiento Landau, y eventualmente las pérdidas radiativas [37][14-15]. Estos procesos van acompañados de la formación de un espectro de potencia de la función de distribución de los electrones, la cual a su vez está vinculada con la intensidad de la radioemisión [110][46][92].

El fenómeno de la estabilización de haces es observado también en el caso de electrones (10 a 20 KeV) que penetran la ionosfera por las regiones auróreas [37].

La radiación electromagnética en la segunda armónica $2\omega_{pe}$ es también un fenómeno asociado a la turbulencia fuerte de Langmuir. La corriente asociada a la radiación $2\omega_{pe}$ es de segundo orden en el campo de Langmuir

$$\underline{j}^{(2)} = e n^{(1)} \underline{v}^{(1)}, \quad n^{(1)} = \nabla \cdot E / 4\pi e, \quad \underline{v}^{(1)} = -\frac{e}{m\omega_{pe}} E \quad (29)$$

por lo cual

$$\underline{j}^{(2)} = -e_z \frac{e}{8\pi m \omega_{pe}} E \partial_z E \sin(2\omega_{pe} t) \quad (30)$$

Suponiendo que la radiación es producida por solitones [33], se obtiene un acuerdo razonable con la intensidad observada [46]. Sin embargo no se ha establecido con certeza la estabilidad de los solitones en campos magnéticos débiles, por lo cual se ha sugerido que la radiación en $2\omega_{pe}$ se debe al colapso de los solitones [44]. Otro problema con la suposición de que los solitones son responsables de la radioemisión, vinculada también a la suposición de que el papel dominante en el desacople del haz de las oscilaciones del plasma es la inestabilidad modulacional que tiene lugar uniformemente sobre todo el plasma, es que se requieren altos niveles de turbulencia de plasma ($W/nT \approx 10^{-2}$) los cuales no se han observado [48]. Esta dificultad puede superarse invocando como efecto fundamental el colapso directo de las ondas de Langmuir excitadas por la inestabilidad de haces [44]. Este punto de vista se sustenta en cálculos numéricos del colapso de Zakharov en geometría plana [87], aunque en ellos no se considera la influencia de los campos magnéticos, los cuales no solo modifican la relación de dispersión de las ondas de Langmuir, sino sus propiedades de polarización [50]. Por otra parte debido a la naturaleza electrostática de las ondas de Langmuir no existe una forma directa, del tipo de (2.30), de radiación dipolar alrededor de la frecuencia del plasma, por lo que surge naturalmente una preeminencia de la emisión en la segunda armónica, como es observado. Incluso la emisión en la frecuencia del plasma puede estar dominada por procesos cuasilineales --

dominantes a bajos niveles de turbulencia -- que también pueden afectar la dinámica del colapso, dado que al amortiguamiento Landau se agregan procesos del tipo

$$l+i \rightarrow i+t \quad (31)$$

donde la dispersión de un plasmón longitudinal por la nube de polarización de un ión produce un plasmón transversal [14]. La emisión de radiación en la interacción haz-plasma fue también estudiada experimentalmente [15].

La presencia de turbulencia fuerte de Langmuir da lugar a la aparición en la función de distribución, de colas de partículas rápidas supratérmicas, como lo demuestran algunos resultados experimentales [2] y numéricos [29]. Estos procesos de aceleración de partículas, que por ser colectivos son sumamente veloces, han sido estudiados en relación a las fulguraciones solares (flares) [116][55]. En las fulguraciones la energía almacenada en los campos magnéticos de las regiones activas del sol, asociadas a lazos (loops) coronales, es rápidamente transferida, por efectos de inestabilidades magnetohidrodinámicas, al plasma y finalmente disipada en forma de radiación electromagnética (radiación X y γ) y en forma de partículas aceleradas [55]. Una partícula puede absorber un plasmón (amortiguamiento Landau) cuando su velocidad es mayor o igual que la velocidad de fase del plasmón, por lo tanto son aceleradas aquellas partículas que ya tienen una alta energía. Si al incrementar su velocidad la partícula encuentra un número

mayor de plasmones, el ritmo de aceleración aumentará [62]. Por ende, la forma final de la función de distribución de las partículas dependerá del espectro de la turbulencia de Langmuir. Además, si bien el número de partículas aceleradas puede ser pequeño respecto del número total de partículas (en el caso contrario se trata mas bien del calentamiento del plasma) la energía de esas partículas puede ser considerablemente grande. En una fulguración solar son acelerados $10^{36} - 10^{34}$ electrones con energías mayores que 25 KeV lo que implica una energía de $10^{29} - 10^{32}$ ergios [55], comparable a la energía de la radiación electromagnética ($\sim 10^{32}$ ergios) y a la energía mecánica de la onda de choque ($\sim 10^{32}$ ergios) [98]. Sin embargo el número de electrones acelerados puede ser mucho menor que 10^{36} . En efecto, en los estallidos de tipo III el número de electrones es del orden de $10^{31} - 10^{34}$ y hay una íntima correlación con la fulguración [55], por lo cual la discrepancia no puede explicarse solo en términos de una pequeña probabilidad de escape.

Suponiendo que se ha excitado la turbulencia de Langmuir, la evolución de la función de distribución queda determinada por una ecuación de difusión en el espacio de las velocidades [62][55]

$$\partial_t f = \partial_v [D(v) \partial_v f] - \mathcal{L}(f) \quad (32)$$

donde el coeficiente de difusión depende del espectro de la turbulencia W [50]

$$D(v) \simeq \frac{e^2}{m^2} \int dk \frac{W_k}{kv} \quad (33)$$

y $L(f)$ es una función de pérdida. Suponiendo que la turbulencia de Langmuir ha alcanzado un espectro de potencia $W_k \sim k^{-\nu}$, como resultado de las interacciones modulantes (turbulencia fuerte), la solución estacionaria de (2.32), considerando pérdidas por colisiones Coulombianas y escape, es aproximadamente una ley de potencias, consistente con las observaciones [55][96][16].

Un problema fundamental, aún no resuelto, es elucidar el mecanismo de excitación de la turbulencia de Langmuir, ya que en este caso la aceleración de partículas es una consecuencia de la turbulencia de Langmuir. Una posibilidad es la generación de turbulencia de Langmuir a partir de turbulencia iónico-acústica [126], pero es dudosa su efectividad para las condiciones imperantes en las fulguraciones [55].

Otro contexto donde son aplicables los conceptos de la turbulencia fuerte excitada por las interacciones modulantes es el de la generación de radiación kilométrica terrestre por medio de electrones aurorales [34][57][99], aunque en este caso el papel fundamental parecen jugarlo las ondas de ciclotrón y no las ondas de Langmuir [57]. En efecto, en la zona auroral de la magnetosfera terrestre la frecuencia de ciclotrón supera la frecuencia del plasma $\omega_B \gtrsim \omega_p$, por lo cual las ondas de ciclotrón son fácilmente excitadas por un haz de electrones

aurorales. Ahora bien, paquetes de estas ondas (electrostáticas) causan una corriente diamagnética que tiende a reducir el campo magnético local en la vecindad de esas ondas, produciendo un corrimiento no-lineal de la frecuencia de ciclotrón proporcional al cuadrado del campo eléctrico. Esta fuerza ponderomotriz [73][97] produce la formación de un pozo magnético que detiene la dispersión del paquete de ondas conduciendo a un estado estacionario. Es posible, en estas condiciones, la formación de solitones tridimensionales cuya amplitud es lo suficientemente grande como para la generación no-lineal de ondas electromagnéticas [57]. La radiación es producida por el proceso de fusión de dos ondas de ciclotrón (c) y su decaimiento en una onda transversal de frecuencia $\omega \approx 2\omega_c$

$$c + c \rightarrow t$$

La corriente responsable de la radiación es la que aparece como consecuencia del campo eléctrico del solitón y de la perturbación en la densidad del plasma en la región del solitón. La eficiencia de la conversión de la energía de los haces en radiación dipolar del solitón resulta en principio de acuerdo con los datos de observación, aunque depende sensiblemente del cociente de la velocidad térmica y la velocidad del haz.

2.8 PLASMAS RELATIVISTAS

El interés por el estudio de las propiedades de los plasmas relativistas ($\beta = mc^2/T \ll 1$) tiene dos vertientes. Por un lado, los experimentos de laboratorio con haces de electrones de alta energía, o los láseres de plasma [74][69]. Por el otro, los fenómenos en plasmas astrofísicos, especialmente aquellos vinculados a la física de la radioemisión de los pulsars [62][50].

Las ondas longitudinales (1) de un plasma relativista poseen propiedades diferentes de las de un plasma no-relativista. En particular, asociada al estudio de la inestabilidad de dos haces, surgió una controversia alrededor de la existencia de ondas longitudinales con velocidades de fase menores que la velocidad de la luz ($\omega/k < c$), condición necesaria para la interacción Cherenkov onda-partícula [75].

Consideremos un plasma relativista en un campo magnético infinito, por lo cual supondremos que la función de distribución es unidimensional $f(z, p, t)$

$$(\partial_t + v \partial_z + e E \partial_p) f(z, p, t) = 0 \quad (34)$$

$$\partial_z E = 4\pi e \int dp f = 4\pi e n \quad (35)$$

son las ecuaciones cinética y de Maxwell, con un campo eléctrico E autoconsistente, donde n es la densidad. Estudiaremos en primer lugar las propiedades lineales de este plasma. Para perturbaciones de la forma $\exp(-i\omega t + ikz)$, (2.34) y (2.35) conducen a la relación de dispersión (a primer orden en potencias del campo eléctrico)

$$\epsilon_k^l E_k = 0, \quad \epsilon^l(\omega, k) = 0 \quad (36)$$

el subíndice k se refiere a (ω, k) , la transformada de Fourier espacio-temporal, y donde la permitividad dieléctrica es

$$\epsilon_k^l = 1 + \frac{4\pi e^2}{k} \int dp \frac{\partial_p f_0}{\omega - kv} \quad (37)$$

o utilizando $\partial_p \gamma = 1/m \gamma^3$, con $\gamma = (1 + p^2/m^2 c^2)^{1/2}$ el factor de Lorentz, obtenemos

$$\epsilon_k^l = 1 - \omega_{pe}^2 \int dp \frac{f_0/n}{\gamma^3 (\omega - kv)^2} \equiv 1 - \omega_{pe}^2 \langle \gamma^{-3} (\omega - kv)^{-2} \rangle \quad (38)$$

La forma específica de la relación de dispersión depende de la forma explícita de la función de distribución no perturbada $f_0(p)$. La permitividad dieléctrica se ha calculado tanto para una distribución maxwelliana relativista isotrópica [21][82] como para una unidimensional [22] y también para una distribución de

ley de potencia [62][84]. Para números de onda pequeños $kC/\omega \ll 1$ (región superlumínica) la forma de la relación de dispersión es la siguiente [76]

$$\omega^2 = \langle \gamma^{-3} \rangle \omega_p^2 + 3k^2 c^2 (1 - \langle \gamma^{-5} \rangle / \langle \gamma^{-3} \rangle) \quad (39)$$

o para una maxwelliana unidimensional [22]

$$\omega^2 = \beta \omega_p^2 + k^2 c^2, \quad \beta^{-1} = \langle \gamma \rangle \quad (40)$$

donde en la frecuencia del plasma hay que considerar la suma sobre todas las especies presentes

$$\omega_p^2 = \sum_s \omega_{ps}^2$$

(2.39) y (2.40) difieren en los factores numéricos de la relación de dispersión para ondas de Langmuir no-relativista. Para frecuencias mucho mayores que $\omega_0 = \sqrt{\beta} \omega_p$ la relación de dispersión se hace aproximadamente lineal [62][76]

$$\omega = c \left[k - \frac{\langle \gamma \rangle}{2 \langle \gamma^3 \rangle} (k - k_*) \right] \quad (41)$$

donde $k^2 = k_*^2 \approx 2 \langle \gamma \rangle \omega_p^2 / c^2$ corresponde a $\omega = \omega_* = ck_*$, como surge de desarrollar $\omega(k)$ alrededor de $k = k_*$

$$\omega \approx \omega_* + \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{k_*} (k - k_*) \approx \omega_0 - \left(\frac{\partial \epsilon / \partial k}{\partial \epsilon / \partial \omega} \right)_{k_*} (k - k_*) \quad (42)$$

y utilizando (2.38). Vemos que

$$\omega_*/\omega_0 \approx \langle \gamma \rangle \gg 1 \quad (43)$$

en contraposición con el caso no-relativista $\omega_*/\omega_0 \approx 1$; (2.43) implica que las ondas longitudinales superlumínicas tienen un

ancho de banda muy grande (Fig. 2.4). Para una distribución isotrópica este ancho de banda se reduce [82]. Además, las ondas son longitudinales siempre que la propagación se efectúa a un ángulo $\theta \ll \langle v \rangle^{-1} \approx \beta$, en caso contrario las ondas para $\omega \gg \sqrt{\beta} \omega_p$ se transforman en ondas electromagnéticas ordinarias, mientras que en la vecindad de $\omega \approx \sqrt{\beta} \omega_p$ permanecen longitudinales [62].

Dado que existen ondas longitudinales con velocidad de fase menor que la velocidad de la luz, es posible su excitación a través de la interacción Cherenkov, por ejemplo en la inestabilidad de haces, análogamente al caso no-relativista [81]. En efecto, vemos que para aquellas ondas cuya velocidad de fase coincide con la velocidad de las partículas, el integrando (2.37) posee un polo

$$\frac{1}{\omega - kv} = \mathcal{P} \frac{1}{\omega - kv} - \pi i \delta(\omega - kv) \quad (44)$$

y aparece una parte imaginaria de la permitividad dieléctrica, que describe precisamente la interacción onda-partícula

$$\text{Im } \epsilon_k^l = - \frac{4\pi^2 e^2}{k} \int dp \, \partial_p f_0 \, \delta(\omega - kv) \quad (45)$$

para funciones de distribución de equilibrio $\partial_p f_0 < 0$, (2.45) describe el amortiguamiento Landau, mientras que si $\partial_p f_0 > 0$ (inversión de población) en algún intervalo de impulsos, (2.45) describe una inestabilidad, cuya tasa de crecimiento es

$$\Gamma_b = - \frac{\text{Im} \epsilon}{\partial \omega \epsilon} \quad (46)$$

Representando esta ecuación como un balance de la energía de oscilación [81]

$$\partial_t W_k = - \omega \text{Im} \epsilon \frac{|E_k|^2}{8\pi} \quad (47)$$

donde $W_k = \omega \partial \omega \epsilon |E_k|^2 / 8\pi$ es la energía de las oscilaciones y $|E_k|^2 / 8\pi$ es la energía electrostática, se deduce que para el plasma relativista, en el cual $\omega \partial \omega \epsilon \approx \langle \gamma^2 \rangle / \langle \gamma \rangle$ (en la región de números de onda cercana a k_*), es mucho mayor que la energía electrostática.

La forma explícita de la tasa de crecimiento Γ_b depende de las funciones de distribución del plasma y del haz (o haces), sin embargo de la ecuación (2.38) que podemos reescribir [84]

$$\epsilon \approx 1 + \epsilon_s, \quad \epsilon_s \approx - \frac{\omega_{ps}^2}{\bar{\gamma}_s^3 (\omega - kc)^2}, \quad (48)$$

donde hemos despreciado la dispersión de velocidades, s indica la especie y el factor de Lorentz efectivo del haz es

$$\bar{\gamma}_s^{-3} = \frac{1}{n_s mc} \int dp \gamma^{-3} f_s \quad (49)$$

se infiere que cuanto más grande es la dispersión térmica del haz, más grande es la permitividad dieléctrica, debido a que $\bar{\gamma}$ esta fundamentalmente determinado por las partículas de menor energía [84]. Es decir que la tasa de crecimiento Γ_b de la

inestabilidad haz-plasma aumenta con la dispersión térmica del haz. Es importante señalar que la mayoría de los estudios de la inestabilidad haz-plasma en un plasma relativista (del tipo encontrado en los pulsars), tratan exclusivamente con haces "frios", monoenergéticos [56][64][53][52].

Como en el caso no-relativista [81] la inestabilidad de haces puede ser de tipo hidrodinámica o cinética. Es hidrodinámica cuando se satisface [84]

$$\bar{\gamma}_b > (n/n_b)^{1/3}, \quad (50)$$

donde

$$\bar{\gamma}_b = (1 - \langle v_b^2 \rangle / c^2)^{-1/2}, \quad \langle v_b^2 \rangle = (1/n_b) \int dp \, v_b^2 f_b \quad (51)$$

f_b es la función de distribución del haz, $\bar{\gamma}_b$ mide la dispersión térmica efectiva del haz. Para el caso de un haz cuya función de distribución sigue una ley de potencia $f_b(\gamma_b) \sim \gamma_b^{-\alpha}$ [4], con un corte a energías menores que cierto γ_0 , la tasa de crecimiento (hidrodinámica) es [84]

$$\Gamma_b^H \approx \left(\frac{n_b}{n} \right)^{1/3} \frac{\omega_p}{\sqrt{\langle \gamma \rangle} \gamma_0}, \quad \gamma_0 > (n/n_b)^{1/3} \quad (52)$$

La tasa de crecimiento cinética para un haz maxwelliano es [75][76]

$$\Gamma_b^K \approx \frac{n_b \gamma_b}{n} \frac{\omega_p}{\langle \gamma \rangle^{5/2}} = \frac{n_b \gamma_b}{n} \beta^{5/2} \omega_p \quad (53)$$

Para los pulsars podemos estimar el valor de Γ_b cerca de la superficie, en la región donde se aceleran los haces. Tomando

$n_b/n \approx 10^{-3} - 10^{-4}$, $\gamma_0 \approx 10$ [4] y $n \approx 10^{14} - 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, $\langle \tau \rangle \approx 10^3$, resulta $\Gamma_b \sim 10^8 - 10^9 \text{ s}^{-1}$ (la inestabilidad es hidrodinámica). Este valor es mucho mayor que la tasa de crecimiento para un haz monoenergético [13], lo cual hace muy efectiva a la inestabilidad de haces para generar ondas de Langmuir en el plasma magnetosférico. Aunque por otra parte, la dispersión térmica de las partículas del haz [3][4] hace imposible la producción de racimos (estables) y la consiguiente radiación coherente [40][79]. Un factor limitante de la inestabilidad haz-plasma es la presencia de inhomogeneidad espacial [85], la cual produce una disminución con la distancia, de la velocidad de fase de las ondas l , transfiriéndolas hacia la región de amortiguamiento Landau. La inhomogeneidad es despreciable si [85] (para la inestabilidad hidrodinámica)

$$\frac{c}{L\omega_p} < \frac{(n_b/n)^{2/3}}{10 \beta^{1/2} \gamma_b^2} \quad (54)$$

Esta desigualdad no se satisface, en las condiciones de los pulsars, para un haz monoenergético, pero sí se cumple para haces con suficiente dispersión térmica, como el que se produce por el mecanismo de creación de pares [4].

Además de las ondas de Langmuir, en un plasma relativista en un fuerte campo magnético existen oscilaciones de baja frecuencia como las ondas magneto-acústicas y de Alfvén, o las ondas electromagnéticas ordinarias y extraordinarias y las ondas de ciclotrón [53][52][62]. Para ángulos de propagación $\theta \ll \beta$, existe una rama de ondas de Alfvén (o magneto-acústicas) [62]

$$\omega = (1 - c^2/2v_A^2)ck, \quad v_A/c \gg 1 \quad (55)$$

donde v_A es la velocidad de Alfvén (Fig. 2.5), que a pesar de tener una velocidad de fase menor que la de la luz, no son afectadas por el amortiguamiento Landau debido a que su campo eléctrico es perpendicular a la dirección del campo magnético, y por consiguiente no hay interacción Cherenkov. A grandes ángulos $\theta > \beta$, las ramas magneto-acústica y Alfvén se desdoblan, y aparece una componente longitudinal del campo eléctrico (paralela al campo magnético externo) por lo cual es posible su excitación por medio de la interacción partícula-onda, ya sea Cherenkov o ciclotrón [125]. Las ondas de Langmuir a su vez, se hacen transversales a grandes números de onda. Una característica peculiar de los plasmas relativistas es que las ondas iónico-acústicas solo aparecen para condiciones muy especiales [62] (en un plasma no relativista existen si la temperatura electrónica es mayor que iónica $T_e > T_i$). En particular, para un plasma de electrones y positrones, esta rama de oscilaciones esta ausente. En un plasma no relativista las ondas iónico-acústicas modificaban las interacciones modulantes de las ondas de Langmuir (ecuaciones de Zakharov 53-54). Por lo tanto, la ausencia de ondas iónico-acústicas en un plasma relativista afectará evidentemente, la dinámica de la turbulencia de Langmuir.

La inestabilidad de haces genera en el plasma ondas de

Langmuir, las cuales como resultado de interacciones no-lineales conducen a un estado turbulento, cuya primera etapa de desarrollo es cuasilineal (es decir que la parte real de la permitividad dieléctrica es lineal, mientras que la parte imaginaria describe los procesos de interacción [35]). Las partículas del haz generan ondas de Langmuir con una tasa de crecimiento Γ_b (lineal), la energía de las partículas del haz se transfiere a las oscilaciones. A su vez, las ondas longitudinales interactúan no-linealmente con el plasma, son dispersadas por las partículas del plasma, cediendo parte de su energía con una tasa [76]

$$\Gamma_{bNL} \approx \frac{\omega_p}{n m c^2} \beta^{5/2} W_o^l \quad (56)$$

donde W_o^l es la energía de las ondas de Langmuir. En la etapa de relajación cuasilineal W_o^l es menor que la energía del haz $n_b m c^2 \gamma_b$, por lo cual

$$\Gamma_{bNL} < \Gamma_b \quad (57)$$

Este es un resultado muy importante, ya que demuestra que como consecuencia de la inestabilidad, la energía contenida en el haz de partículas se transfiere completamente a las oscilaciones de Langmuir. Se excita la turbulencia de Langmuir, también en un plasma relativista. Sin embargo, su desarrollo es distinto, por la ausencia de la rama de baja frecuencia de las oscilaciones iónico-acústicas, y por la amplia banda de frecuencias de las oscilaciones longitudinales superlumínicas (que en el caso no-relativista se concentran alrededor de la frecuencia del plasma). Este segundo efecto ($\omega_o/\omega_* \sim \beta$), lleva a que durante

la transferencia de la energía de las oscilaciones hacia las regiones de pequeño número de onda, el fenómeno de condensación en los plasmas no-relativistas, una parte importante de la energía se transfiere (dispersión) a las partículas del plasma (acelerándolas, y calentando el plasma). La energía finalmente depositada en el condensado W_f^l , respecto de la energía inicial W_o^l de las oscilaciones es [76]

$$W_f^l / W_o^l \sim \omega_o / \omega_* \sim \beta \ll 1 \quad (58)$$

Es decir que como resultado de la evolución no-lineal de la inestabilidad haz-plasma en un plasma relativista, se excitan ondas de Langmuir, las cuales ceden parte de su energía inicial, comparable a la del haz, a las partículas y parte forma un condensado. Cabe preguntarse si este condensado es inestable frente a las perturbaciones modulacionales, como en un plasma no-relativista. Para contestar esta pregunta podemos repetir los razonamientos usados anteriormente, ahora con la relación de dispersión (2.40) y la expresión para la presión de un gas relativista

$$p = \frac{2}{3} n \langle \gamma \rangle mc^2 + \frac{|E|^2}{16\pi}, \quad (59)$$

en lugar de (2.10). Dado que en un plasma relativista (de electrones y positrones la rama iónico-acústica está ausente, la respuesta del plasma es estrictamente local

$$\frac{\delta n}{n} = -\frac{3}{2} \frac{|E|^2}{16\pi n \langle \gamma \rangle mc^2}, \quad (60)$$

con lo cual se arriba a una ecuación del tipo S3

$$i \partial_t E + \frac{c^2}{2\sqrt{\beta} \omega_p} \partial_{zz} E + \frac{3}{4} \frac{\omega_p \beta^{3/2}}{16\pi n mc^2} |E|^2 E = 0. \quad (61)$$

Por lo tanto un plasma relativista es al igual que uno no-relativista, inestable frente a perturbaciones modulacionales [63][22][94][50]. Comparando el término dispersivo con el no-lineal en (2.61) vemos que para campos del orden de $|E|^2 \sim 16\pi n mc^2$, el número de onda alrededor del cual se desarrolla la inestabilidad modulacional es $k \sim \beta \omega_p / c$, que corresponde a frecuencias cercanas a $\omega_0 \approx \sqrt{\beta} \omega_p$.

La ecuación (2.61) tiene por supuesto soluciones tipo solitón. En la magnetosfera de los pulsars, debido a la gran intensidad del campo magnético, las partículas radían su impulso perpendicular al campo magnético rápidamente [125]

$$\tau_1 \approx \frac{m^3 c^5}{e^4 B_0^2} \frac{mc^2}{\epsilon} \approx 10^{-15} \left(\frac{10^{12} \text{ Gauss}}{B_0} \right)^2 \frac{mc^2}{\epsilon} [\text{s}] \quad (62)$$

es el tiempo (en segundos) característico de pérdida de la energía transversal, es la energía de la partícula ($\epsilon \sim \langle \gamma \rangle mc^2$). Se establece por lo tanto, una función de distribución prácticamente unidimensional. En estas condiciones, los solitones son estables [77]. Diversos autores han propuesto

mecanismos de radioemisión de los pulsars basados en los solitones de Langmuir [50][63][22]. Asociando por ejemplo, la longitud de coherencia al ancho característico de los solitones [22], e invocando radiación de curvatura emitida por los solitones que viajan por las líneas del campo magnético [63][50].

III. INESTABILIDAD MODULACIONAL EN PRESENCIA DE ONDAS DE ALFVEN. METODO KBM.

3.1 INTRODUCCION. EL DECAIMIENTO DE LAS ONDAS DE LANGMUIR EN ONDAS DE ALFVEN

En las regiones polares de las estrellas de neutrones, haces de partículas ultrarrelativistas ($\langle \gamma \rangle \approx 10^6$) inciden sobre un plasma denso de electrones y positrones excitando ondas de Langmuir. Estas ondas evolucionan hasta formar un condensado, el cual resulta inestable frente a perturbaciones modulacionales. En el límite de campo magnético infinito (aproximación apropiada en las cercanías de los casquetes polares donde $B_0 \approx 10^{12}$ Gauss) los solitones de Langmuir son estables. Sin embargo, la intensidad del campo magnético decrece rápidamente con la distancia al pulsar, al menos como r^{-3} , así que en la región de emisión situada alrededor de los $100R_* = 10^8$ cm, el campo magnético decrece a unos $10^5 - 10^6$ Gauss. En estas condiciones es posible el decaimiento de una onda de Langmuir (1) en dos ondas de Alfvén (a) [83]

$$l \rightarrow a + a \quad (1)$$

con una tasa de crecimiento, en la aproximación de fases aleatorias, de

$$\Gamma_0 = \sqrt{\beta} \omega_p W^l / B_*^2 \quad (2)$$

donde $\sqrt{\beta} \omega_p$ es la frecuencia característica de las ondas de

Langmuir en el condensado, B_* es el campo magnético en la zona de emisión, y W^l la densidad de energía de las ondas l. Si la interacción se produce entre paquetes de onda bien definidos, en la región de excitación de las ondas de Langmuir por los haces de alta energía, la tasa de crecimiento de las ondas de Alfvén, debida a la interacción (3.1) es

$$\Gamma_D^{HD} \approx \Gamma^2 \omega_p |E_{zk*}| / B_* \quad (3)$$

donde $\Gamma = \omega_p / \sqrt{\beta} \omega_B$ y $k_* = \omega_p / \sqrt{\beta} c$. Teniendo en cuenta (2.58)

$$W^l \sim \beta W_0^l \sim n m c^2 \quad (4)$$

y suponiendo que en la región de emisión la densidad es de unos 10^{10} cm^{-3} , $\Gamma_D \approx 10^3 \text{ s}^{-1}$ y $\Gamma_D^{HD} \sim 10^6 \text{ s}^{-1}$, que son mucho menores que la tasa de crecimiento de las ondas de Langmuir debida a la inestabilidad de haces $\Gamma_b \approx 10^7 \text{ s}^{-1}$ en la misma región.

En principio debido al decaimiento de ondas l, aparece en el plasma una cierta densidad de energía de ondas a, $W^a \sim (\Gamma_b / \Gamma_l) W^l$. Ahora bien, el campo electromagnético asociado a la onda a modifica las propiedades termodinámicas del medio en el cual se propaga (por ejemplo la densidad o la presión), por lo cual cambian las propiedades dieléctricas, de tal manera que se produce un corrimiento en la frecuencia de las oscilaciones que es proporcional a la amplitud de la onda. En el caso de la onda electromagnética de Alfvén, se produce una perturbación de la densidad causada por la presión de radiación y por lo tanto una

variación en la frecuencia del plasma. Mientras el proceso de tres ondas esta vinculado a términos no-lineales en la parte imaginaria de la permitividad dieléctrica, el efecto ponderomotriz de las ondas de Alfvén modifica la parte real de la permitividad, es decir incide en la dinámica de la inestabilidad modulacional de las ondas de Langmuir. Queda entonces planteado el problema del tratamiento consistente de las interacciones modulantes de las ondas 1 en presencia de un campo de ondas de Alfvén, del cual las mismas ondas 1 son fuente a través del proceso de decaimiento no-lineal.

Este es un problema básico de la física del plasma de la magnetosfera de los pulsars; la necesidad de estudiar consistentemente los distintos procesos no-lineales ya ha sido señalada por Mikhailovskii [85], y nace tal vez de la incapacidad de poder explicar la radioemisión de los pulsars mediante procesos lineales exclusivamente.

Por otra parte, mientras la inhomogeneidad del plasma cumple un papel estabilizador de la inestabilidad de haces, pues tiende a decrecer la velocidad de fase de las ondas de Langmuir [85] llevándolas a regiones espectrales () donde se debilitan por efecto Landau, tanto la conversión de la energía de las ondas de Langmuir hacia la parte de largas longitudes de onda del espectro y la formación de solitones supraluminosos [22] como la conversión de las ondas de Langmuir en ondas de Alfvén, son procesos no-lineales que compiten con el efecto de la

inhomogeneidad. Además, las ondas de Alfvén mismas son interesantes en relación a la radioemisión de los pulsars [125][62][53][83] dado que son débilmente amortiguadas y pueden transformarse fácilmente en ondas electromagnéticas (al dejar el plasma), aunque la posibilidad de su generación lineal en un plasma de electrones y positrones es controvertida [50][141].

En este capítulo el problema de la inestabilidad modulacional en presencia de ondas de Alfvén será encarado usando un metodo perturbativo (Sec. 3.2), esencialmente en potencias del campo eléctrico, debido a Krilov, Bogoliubov y Mitropolsky (KBM) [60]. Las ecuaciones básicas (Sec. 3.3), apropiadas a este problema fueron planteadas por Mikhailovskii [83], quien estudio fundamentalmente los procesos de segundo orden, cuadráticos en el campo eléctrico, como la interacción de tres ondas (Sec. 3.4). El método KBM permite encontrar a tercer orden, las ecuaciones de onda no-lineales para la amplitud lentamente variable del campo eléctrico (Sec. 3.5), que como veremos (Sec. 3.6) poseen soluciones de tipo solitón.

3.2 METODO KBM

Para ilustrar como funciona el método KBM [60] vamos a estudiar la inestabilidad modulacional de las ondas de Langmuir en un plasma relativista de electrones y positrones unidimensional ($B_z \rightarrow \infty$) [22]. Este cálculo será útil para el caso más complejo de interacción de las ondas de Langmuir con las electromagnéticas.

Las ondas de Langmuir son electrostáticas

$$(\partial_t + v \partial_z + e E \partial_p) f(z, p, t) = 0 \quad (5)$$

$$\partial_z E = 4\pi \sum e \int dp f(z, p, t) \quad (6)$$

$f(z, p, t)$ es la función de distribución de una partícula y $E(z, t)$ es el campo eléctrico autoconsistente del plasma. Se buscará una solución en potencias del campo eléctrico

$$E = \epsilon E^{(1)} + \epsilon^2 E^{(2)} + \epsilon^3 E^{(3)} + \dots \quad (7)$$

donde el campo a primer orden se escribe como

$$E^{(1)} = E e^{i\psi} + E^* e^{-i\psi}, \quad \psi = kz - \omega t \quad (8)$$

$E(z,t)$ es una amplitud lentamente variable, y ψ es una fase real. Dado que $E(z,t)$ varía lentamente con la posición y el tiempo, sus derivadas son desarrolladas en potencias de ϵ

$$\partial_t E = \epsilon \alpha_1(E, E^*) + \epsilon^2 \alpha_2(E, E^*), \quad (9)$$

$$\partial_z E = \epsilon \beta_1(E, E^*) + \epsilon^2 \beta_2(E, E^*) \quad (10)$$

A su vez los distintos términos en el desarrollo de ξ (3.7) son funciones de E , E^* y ψ

$$E^{(i)} = E^{(i)}(E, E^*, \psi) \quad (11)$$

Paralelamente a (3.7) habrá una expansión de f

$$f = f_0 + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \epsilon^3 f^{(3)} \quad (12)$$

$$f^{(i)} = f^{(i)}(E, E^*, \psi) \quad (13)$$

Cuando los desarrollos (3.7) y (3.12) se introducen en las ecuaciones dinámicas (3.5) y (3.6), aparecen a cada orden términos seculares, es decir proporcionales a $\exp(i\psi)$, provenientes de las derivadas de las variables (la amplitud E) de órdenes inferiores, a través de (3.9,10). En esencia el metodo KBM consiste en suponer que la amplitud varía tan lentamente que la solución debe estar libre de términos seculares, es decir que en las ecuaciones de cada orden deben removerse los términos seculares. Las condiciones de ausencia de secularidad a distintos órdenes son en realidad ecuaciones diferenciales que

determinan la dinámica de la amplitud $E(z,t)$, dado que son relaciones que vinculan las funciones incógnitas α_i y β_i de (3.9,10), con la amplitud $E(z,t)$.

Es importante remarcar que con la forma elegida para el campo eléctrico (3.7,8) solo se tienen en cuenta procesos que involucran ondas de Langmuir con frecuencia ω , para las cuales no existen interacciones de tres ondas ($l \rightarrow l+l$), y por lo tanto, los únicos efectos no-lineales están vinculados a las interacciones modulacionales, es decir a los batidos de baja frecuencia que resultan de la superposición de ondas de alta frecuencia.

3.2.1 Cálculo a Primer Orden. Relación de Dispersión.

A primer orden el sistema de ecuaciones es

$$(\partial_t + v \partial_z)^{(0)} f^{(1)} = -e E^{(1)} \partial_p f_0, \quad (14)$$

$$\partial_z^{(0)} E^{(1)} = 4\pi Z e \int dp f^{(1)}, \quad (15)$$

donde las derivadas a orden cero son simplemente

$$\partial_t^{(0)} = -\omega \partial_\psi, \quad \partial_z^{(0)} = k \partial_\psi \quad (16)$$

omitiendo los términos complejo conjugados y usando (3.8) se obtiene

$$f^{(1)} = -ie \frac{\partial_p f_0}{\omega - kv} E e^{i\psi} \quad (17)$$

Reemplazando (3.17) en (3.15) se obtiene la relación de dispersión (2.37) que reescribimos

$$\epsilon^l = 1 - \omega_p^2 I_2, \quad I_n = \int \frac{dp}{n\gamma^3} Y_n, \quad Y_n = \frac{\partial_p f_0}{(\omega - kv)^n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (18)$$

y $\omega_p^2 = 8\pi e^2 n/m$ tiene en cuenta la contribución a la frecuencia del plasma de electrones y positrones.

3.2.2 Cálculo a Segundo Orden

Las ecuaciones de partida son

$$(\partial_t + v\partial_z)^{(0)} f^{(2)} + (\partial_t + v\partial_z)^{(1)} f^{(1)} = -e E^{(1)} \partial_p f^{(1)} - e E^{(2)} \partial_p f_0, \quad (19)$$

$$\partial_z^{(0)} E^{(2)} + \partial_z^{(1)} E^{(1)} = 4\pi \Sigma e \int dp f^{(2)}, \quad (20)$$

donde

$$(\partial_t + v\partial_z)^{(0)} f^{(2)} = -(\omega - kv) \partial_\psi f^{(2)},$$

$$(\partial_t + v\partial_z)^{(1)} f^{(1)} = -ie Y_1 (\alpha_1 + v\beta_1) e^{i\psi},$$

$$e E^{(1)} \partial_p f^{(1)} = -ie^2 \partial_p Y_1 E^2 e^{2i\psi},$$

$$\partial_z^{(0)} E^{(2)} = k \partial_\psi E^{(2)},$$

$$\partial_z^{(1)} E^{(1)} = \beta_1 e^{i\psi}.$$

Colectando los términos se obtiene

$$\partial_{\psi} f^{(2)} = -ie Y_2 (\alpha_1 + v\beta_1) e^{i\psi} - ie^2 \frac{\partial_p Y_1}{\omega - kv} E^2 e^{2i\psi} + e Y_1 E^{(2)}, \quad (21)$$

$$\partial_{\psi} E^{(2)} = -\frac{\beta_1}{k} e^{i\psi} + \frac{4\pi}{k} \sum e \int dp f^{(2)}. \quad (22)$$

Derivando respecto de ψ (3.22) y sustituyendo $\partial_{\psi} f^{(2)}$ obtenemos

$$(\partial_{\psi} \psi + \omega_p^2 I_2) E^{(2)} = -i \sum \frac{4\pi e^2}{k} \int dp Y_2 (\alpha_1 + v\beta_1) e^{i\psi} + \sum \omega_{pe}^2 e I_3 E^2 e^{2i\psi} \quad (23)$$

donde

$$v_l = \frac{1 + 8\pi e^2 \int dp v Y_2}{8\pi e^2 \int dp Y_2}$$

La condición de ausencia de secularidad en la solución de (3.23) se escribe como

$$\alpha_1 + v_l \beta_1 = 0 \quad (24)$$

Con esta condición la solución es

$$E^{(2)} = -\frac{1}{3} \sum \omega_{pe}^2 e I_3 E^2 e^{2i\psi}, \quad (25)$$

donde hemos usado que

$$I_3(2\omega)/\epsilon^l(2\omega) = \frac{1}{3} I_3(\omega)$$

Ahora bien, para un plasma de electrones y positrones, como el que estamos tratando, la suma en (3.25) se cancela, la carga e está elevada a una potencia impar, por lo cual en este caso particular

$$E^{(2)} = 0, \quad (26)$$

no se genera, a segundo orden, un campo en la segunda armónica como ocurre en los plasmas no-relativistas. Este hecho hace evidente la ausencia de procesos no-lineales cuadráticos en el campo eléctrico en un plasma de electrones y positrones. Por otra parte (3.24) implica que en esta aproximación, la amplitud $E(z,t)$ es estacionaria, permanece constante en un sistema de referencia que se mueve con la velocidad de grupo de las ondas de Langmuir V_L .

Podemos, además, escribir $f^{(2)}$ integrando directamente (3.21), sabiendo que $E^{(2)} = 0$, y que $\alpha_1 = -V_L/\beta_1$, resultando

$$f^{(2)} = -\frac{e^2}{2} \frac{\partial_p Y_1}{\omega - kv} E^{(1)} e^{2i\psi} - e Y_2 (\omega - V_L)/\beta_1 e^{i\psi} \quad (27)$$

3.2.3 Cálculo a Tercer Orden. Ecuación de Onda No-lineal.

A tercer orden solo interesa obtener la condición de ausencia de secularidad en la solución a este mismo orden, por lo cual nos limitaremos a calcular solo aquellos términos que en la ecuación de Poisson (3.6) sean proporcionales a $\exp(i\psi)$, y que denotamos con una tilde. La ecuación para $\tilde{f}^{(3)}$ es

$$-(\omega - kv) \partial_{\psi} \tilde{f}_3 + (\partial_t + v \partial_z)^{(1)} \tilde{f}^{(2)} + (\partial_t + v \partial_z)^{(2)} \tilde{f}^{(1)} = -e \tilde{E}^{(1)} \partial_p \tilde{f}^{(2)} \quad (28)$$

donde

$$(\partial_t + v\partial_z)^{(1)} \tilde{f}^{(1)} = -eY_2(v-v_l)^2(\beta_1\partial_E\beta_1 + \beta_1^*\partial_{E^*}\beta_1)e^{i\psi}$$

$$(\partial_t + v\partial_z)^{(2)} \tilde{f}^{(1)} = -ieY_1(\alpha_2 + v\beta_2)e^{i\psi}$$

$$e\widetilde{E^{(1)}\partial_p}f^{(2)} = -\frac{e^3}{2}\partial_p\frac{\partial_p Y_1}{\omega - kv}|E|^2Ee^{i\psi}$$

La ecuación para $\tilde{E}^{(3)}$ es

$$k\partial_\phi\tilde{E}^{(3)} + \beta_2e^{i\psi} = 4\pi Ze\int dp\tilde{f}^{(3)} \quad (29)$$

Trabajando como lo hicimos a segundo orden, resulta la siguiente relación

$$\begin{aligned} 0 = & -i\sum\frac{4\pi e^2}{k}\int dpY_2(\alpha_2 + v_l\beta_2) - \sum\frac{4\pi e^2}{k}\int dp(v-v_l)^2Y_3(\beta_1\partial_E\beta_1 + \\ & + \beta_1^*\partial_{E^*}\beta_1) - \frac{1}{2}\sum\frac{4\pi e^4}{k}\int dp\frac{1}{\omega - kv}\partial_p\frac{\partial_p Y_1}{\omega - kv}|E|^2E. \end{aligned} \quad (30)$$

O haciendo (ver (3.9, 10))

$$\alpha_2 \rightarrow \partial_{t_2}E - \alpha_1/\epsilon, \quad \beta_2 \rightarrow \partial_{z_2}E - \beta_1/\epsilon,$$

$$\beta_1\partial_E\beta_1 + \beta_1^*\partial_{E^*}\beta_1 \rightarrow \partial_{z_1z_1}E,$$

con

$$t_2 = \epsilon^2 t, \quad z_2 = \epsilon^2 z, \quad z_1 = \epsilon z$$

(3.30) se transforma en

$$i(\partial_{t_2} + v_l\partial_{z_2})E + P\partial_{z_1z_1}E + Q|E|^2E = 0, \quad (31)$$

donde

$$P = \frac{\int dp (v - V_L)^2 Y_3}{\int dp Y_2} , \quad (32)$$

$$Q = \frac{e^2}{2 \int dp Y_2} \int dp \frac{1}{\omega - kv} \partial_p \frac{\partial_p Y_1}{\omega - kv} .$$

Transformando las coordenadas según

$$t = \epsilon^2 t , \quad z = \epsilon (z - V_L t) ,$$

(3.31) resulta la ecuación de Schrödinger no-lineal

$$i \partial_t E + P \partial_{zz} E + Q |E|^2 E = 0 \quad (33)$$

Una estimación cruda de los coeficientes P y Q puede hacerse teniendo en cuenta (3.18), y suponiendo que $\omega - kv \approx \omega_p \sqrt{\beta}$, $p \approx mc \beta^{-1}$

$$P \approx \frac{c^2}{\sqrt{\beta} \omega_p} , \quad Q \approx \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{\beta^{3/2}}{\omega_p} \quad (34)$$

con los cuales (3.33) coincide salvo factores numéricos con (2.61).

3.3 ECUACIONES BASICAS [83]

Para considerar efectos de orden superior en $\Gamma = \omega_p / \sqrt{\beta} \omega_B$, es decir vinculados a la finitud del campo magnetico $\underline{B}_0 = B_0 \underline{e}_z$, es necesario tener en cuenta una componente perpendicular a \underline{B}_0 del impulso de las partículas, asociado precisamente a ondas electromagnéticas. Dado que las frecuencias de interés son pequeñas respecto de la frecuencia de ciclotrón y las longitudes de onda largas respecto del radio de Larmor, es posible promediar la ecuación de Vlasov sobre un período de Larmor [83]

$$(\partial_t + \bar{v}_z \partial_z + e \underline{\xi} \cdot \underline{e}_0 \partial_p) f(z, p, t) = 0 \quad (35)$$

donde $\underline{e}_0 = \underline{B}_T / B_T$ es un versor según la dirección del campo magnético total $\underline{B}_T = \underline{B}_0 + \underline{B}$, \underline{B} es el campo magnético asociado a la onda electromagnética, mientras que $\underline{\xi}$ contiene partes electrostáticas y electromagnéticas, las cuales estarán desacopladas si $\underline{k} = k \underline{e}_z$, si solo se considera propagación a lo largo de \underline{B}_0 . La corriente se define como

$$\underline{j} = \sum_{\pm} e \int dp \bar{\underline{v}} f(z, p, t), \quad (36)$$

donde $\bar{\underline{v}}$ es la velocidad de la partícula, electrón o positrón, promediada sobre un período de Larmor

$$\bar{\psi} = \underline{\psi} - \frac{mc\gamma}{eB_T} (\partial_t + \underline{\psi} \cdot \nabla) \underline{\psi} \wedge \underline{e}_z, \quad (37)$$

$$\underline{\psi} = v \underline{e}_0 + (c/B_T) \underline{\xi} \wedge \underline{e}_0$$

El sistema de ecuaciones se completa con las ecuaciones de Maxwell, para las cuales adoptamos la geometría de la Fig. 3.1, es decir consideraremos ondas que se propagan paralelamente a \underline{B}_0 .

*ondas electrostáticas

$$\partial_t \underline{E}_z = -4\pi j_z \quad (38)$$

*ondas electromagnéticas

$$(\partial_{tt} - c^2 \partial_{zz}) \underline{E}_\perp = -4\pi \partial_t j_\perp \quad (39)$$

$$\partial_t \underline{B} = c \partial_z \underline{E} \wedge \underline{e}_z \quad (40)$$

3.4 RELACIONES DE DISPERSION Y PROCESOS DE TRES ONDAS

El método KBM, reseñado en la Sec. 3.2 se limitaba a describir la dinámica de una onda de amplitud $E(x,t)$ con frecuencias cercanas a la frecuencia $\omega_0 \approx \sqrt{\beta} \omega_p$, por lo tanto para aplicarlo a las ecuaciones (3.35-40) es necesario generalizarlo al caso en que interactúan tres ondas.

En primer lugar veamos cuáles son los desarrollos perturbativos en potencias de ϵ , para los distintos campos que aparecen en las ecuaciones básicas:

*Campo paralelo

$$\underline{\epsilon} \cdot \underline{e}_0 = \epsilon E_z^{(1)} + \epsilon^2 \left(E_z^{(2)} + \frac{\underline{E}^{(1)} \cdot \underline{B}^{(1)}}{B_0} \right) + \epsilon^3 \left(E_z^{(3)} - \frac{1}{2B_0^2} E_z^{(1)} B^{(1)2} + \frac{\underline{E}^{(1)} \cdot \underline{B}^{(2)}}{B_0} + \frac{\underline{E}^{(2)} \cdot \underline{B}^{(1)}}{B_0} \right) \quad (41)$$

dato que

$$\underline{e}_0 = \epsilon \left(\underline{e}_z + \frac{\underline{B}^{(1)}}{B_0} \right) + \epsilon^2 \left(\frac{\underline{B}^{(2)}}{B_0} - \frac{B^{(1)2}}{2B_0} \underline{e}_z \right) \quad (42)$$

*Funcion de distribución

$$f = f_0 + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \epsilon^3 f^{(3)} \quad (43)$$

*Velocidad promedio

$$\overline{v}_z = v - c \epsilon^2 \frac{B^{(1)2}}{2B_0^2} + c \epsilon^2 \frac{(\underline{E}^{(1)} \wedge \underline{B}^{(1)})_z}{B_0^2} + c \epsilon^3 \frac{(\underline{E}^{(1)} \wedge \underline{B}^{(2)})_z}{B_0^2} \quad (44)$$

$$\overline{U}_1 = \varepsilon \overline{U}_1^{(1)} + \varepsilon^2 \overline{U}_1^{(2)} \quad (45)$$

donde

$$\overline{U}_1^{(1)} = v \frac{B^{(1)}}{B_0} + c \frac{\underline{E}^{(1)} \wedge \underline{e}_z}{B_0} - \frac{mc^2 \gamma}{e B_0^2} (\partial_t + v \partial_z)^{(0)} (\underline{E}^{(1)} \wedge \underline{e}_z + \frac{v}{c} \underline{B}^{(1)}) \wedge \underline{e}_z \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_1^{(2)} = & v \frac{B^{(2)}}{B_0} + c \frac{\underline{E}^{(2)} \wedge \underline{e}_z}{B_0} + \frac{c}{B_0^2} (\underline{E}^{(1)} \wedge \underline{B}^{(1)})_1 - \\ & - \frac{mc^2 \gamma}{e B_0^2} (\partial_t + v \partial_z)^{(1)} (\underline{E}^{(1)} \wedge \underline{e}_z + \frac{v}{c} \underline{B}^{(1)}) \wedge \underline{e}_z - \\ & - \frac{mc^2 \gamma}{e B_0^2} (\partial_t + v \partial_z)^{(0)} \left[\underline{E}^{(2)} \wedge \underline{e}_z + (\underline{E}^{(1)} \wedge \underline{B}^{(1)})_1 + \frac{v}{c} \underline{B}^{(2)} \right] \wedge \underline{e}_z \end{aligned} \quad (47)$$

Suponemos que la solución inicial lineal se escribe como una superposición de tres ondas

$$\underline{E}^{(1)} = E_{z0} e^{i\psi_0} \underline{e}_z + E_{x1} e^{i\psi_1} \underline{e}_x + E_{y2} e^{i\psi_2} \underline{e}_y, \quad \psi_i = k_i z - \omega_i t \quad (48)$$

donde las amplitudes $E_i(z, t)$ son funciones lentamente variables, y por lo tanto sus derivadas se escriben como

$$\partial_t E_i = \varepsilon \alpha_i^{(1)}(E_i, E_i^*) + \varepsilon^2 \alpha_i^{(2)}(E_i, E_i^*) \quad (49)$$

$$\partial_z E_i = \varepsilon \beta_i^{(1)}(E_i, E_i^*) + \varepsilon^2 \beta_i^{(2)}(E_i, E_i^*) \quad (50)$$

Ahora resolvemos a primer orden. Dado que con la geometría adoptada los modos longitudinales y transversales están desacoplados, la relación de dispersión para las ondas longitudinales será la misma que en el caso de campo magnético

infinito

$$\epsilon^l = 1 + \frac{8\pi e^2}{\omega} \int dp \frac{v \partial_p f_0}{\omega - kv} = 1 - \omega_p^2 I_2 \quad (51)$$

Además

$$f^{(1)} = -ie Y_1 E_0 e^{i\psi_0}, \quad (52)$$

$$\underline{B}^{(1)} = -\frac{ck_2}{\omega_2} E_2 e^{i\psi_2} \underline{e}_x + \frac{ck_1}{\omega_1} E_1 e^{i\psi_1} \underline{e}_y, \quad (53)$$

(Y_1 esta evaluado en ω_0, k_0)

Para hallar la relación de dispersión para las ondas transversales calculamos la corriente perpendicular

$$\underline{j}_\perp^{(1)} = \sum e \int dp \underline{v}_\perp^{(1)} f_0 \quad (54)$$

utilizando las expresiones de los campos a primer orden y reemplazando en $\underline{v}_\perp^{(1)}$ (3.46)

$$\begin{aligned} \underline{j}_\perp^{(1)} = & -2i \frac{mc^2}{B_0^2} \int dp \gamma f_0 \left(\frac{\omega_1^2 + k_1^2 v^2}{\omega_1} E_1 e^{i\psi_1} \underline{e}_x + \right. \\ & \left. + \frac{\omega_2^2 + k_2^2 v^2}{\omega_2} E_2 e^{i\psi_2} \underline{e}_y \right) \end{aligned} \quad (55)$$

los términos en potencias impares de e se anulan al efectuar la suma. De la ecuación de Maxwell para el campo transversal obtenemos la relación de dispersión

$$\epsilon_\perp - c^2 k^2 / \omega^2 = 0 \quad (56)$$

$$\epsilon_\perp = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} (\langle \gamma \rangle + \langle \gamma - \gamma^{-1} \rangle \frac{c^2 k^2}{\omega^2}) = 1 + \frac{8\pi mc^2}{B_0^2 \omega^2} \int dp \gamma f_0 (\omega - kv)^2 \quad (57)$$

recordamos que $\langle g \rangle = \int \frac{dp}{n} f_0 g$ y que $\langle p \rangle = 0$, no hay corriente a orden cero. Esta rama de oscilación corresponde a las ondas de Alfvén (o magneto-sónicas)

$$\omega = c \left(1 - \frac{\beta \omega_p^2}{\omega_B^2} \right) k = V_a k \quad (58)$$

cuya velocidad de fase, que coincide con su velocidad de grupo, V_a es cercana a la velocidad de la luz ($\beta = \langle \gamma \rangle^{-1} \ll 1$, siempre consideramos un plasma ultrarrelativista).

Las ecuaciones (3.51) y (3.57) caracterizan completamente las propiedades dieléctricas de un plasma relativista de electrones y positrones en un fuerte campo magnético, en el caso de ondas que se propagan paralelas a ese campo magnético. Existen por lo tanto ondas longitudinales (l) de Langmuir, cuya permitividad dieléctrica es $\epsilon^l(\omega, k)$, y ondas de Alfvén (a) con permitividad $\epsilon_l(\omega, k)$, que en esta aproximación son no-dispersivas y polarizadas transversalmente.

Pasamos ahora al segundo orden, y analizamos primero el modo longitudinal

$$-\omega \partial_\psi E_z^{(2)} + \partial_t^{(4)} E_z^{(4)} = -4\pi \sum_f e \int dp (v f^{(2)} + \bar{v}_z^{(2)} f_0), \quad (59)$$

$$\begin{aligned} -(\omega - kv) \partial_\psi f^{(2)} + (\partial_t + v \partial_z)^{(4)} f^{(4)} = & -e E_z^{(4)} \partial_p f^{(4)} - \frac{e}{B_0} E^{(4)} \cdot B^{(4)} \partial_p f_0 - \\ & - e E_z^{(2)} \partial_p f_0 \end{aligned} \quad (60)$$

Usando las expresiones de los campos a primer orden, vemos que aparecen superposiciones de ondas a frecuencias que son

combinaciones de las frecuencias iniciales

$$\frac{E^{(1)} \cdot B^{(1)}}{B_0} = \frac{c}{B_0} \left(\frac{k_1}{\omega_1} - \frac{k_2}{\omega_2} \right) (E_1 E_2 e^{i\psi_1 + i\psi_2} + E_1 E_2^* e^{i\psi_1 - i\psi_2} + cc), \quad (61)$$

(cc denota complejo conjugado de los términos anteriores).

Notando que a (3.59) contribuyen solo los términos en potencias impares de e , escribimos

$$\begin{aligned} \partial_\psi f^{(2)} = & -ieY_2(\alpha_0^{(1)} + v\beta_0^{(1)})e^{i\psi_0} - ie^2 \frac{\partial_p Y_1}{\omega - kv} E_0^2 e^{2i\psi_0} + \\ & + \frac{ec}{B_0} \left(\frac{k_1}{\omega_1} - \frac{k_2}{\omega_2} \right) Y_1 (E_1 E_2 e^{i\psi_1 + i\psi_2} + E_1 E_2^* e^{i\psi_1 - i\psi_2}) + eY_1 E_z^{(2)}, \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} (\partial_\psi \psi - \frac{\partial \pi e^2}{\omega} \int dp v Y_1) E_z^{(2)} = & \frac{i}{\omega} (1 - 8\pi e^2 \int dp v Y_2) (\alpha_0^{(1)} + v\beta_0^{(1)}) e^{i\psi_0} + \\ & + \frac{c}{B_0} \frac{8\pi e^2}{\omega} \int dp v Y_1 (E_1 E_2 e^{i\psi_1 + i\psi_2} + E_1 E_2^* e^{i\psi_1 - i\psi_2}) \left(\frac{k_1}{\omega_1} - \frac{k_2}{\omega_2} \right). \end{aligned} \quad (63)$$

En la ecuación (3.63) para el campo longitudinal a segundo orden notamos que además del término en ψ_0 , evidentemente secular, aparecen ondas en las frecuencias $\omega_1 + \omega_2$ y $\omega_1 - \omega_2$. De las relaciones de dispersión puede verse además que existen ω_0 (longitudinal) y ω_1, ω_2 (Alfvén) tales que

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2, \quad k_0 = k_1 + k_2, \quad (64)$$

$$\varepsilon^l(\omega_1 + \omega_2, k_1 + k_2) = 0, \quad \varepsilon^l(\omega_0, k_0) - c^2 k_0^2 / \omega_0^2 = 0 \quad (65)$$

Por lo tanto para las ondas que satisfacen (3.64) el término en $\psi_1 + \psi_2$ es un término secular, $\psi_0 = \psi_1 + \psi_2$. Es decir que para el proceso de tres ondas, cuyas ecuaciones de conservación son (3.64), la condición de ausencia de secularidad en la solución de

$E_z^{(2)}$ se escribe como

$$i(\alpha_0^{(1)} + V_1 \beta_0^{(1)}) = \frac{c}{B_0} \frac{1}{\partial_{\omega_0} \epsilon^l} \left(\frac{k_1}{\omega_1} - \frac{k_2}{\omega_2} \right) E_1 E_2, \quad (66)$$

dado que

$$\frac{8\pi e^2}{\omega} \int dp v Y_1 = \epsilon^l - 1 = -1, \quad \epsilon^l(\omega_0, k_0) = 0 \quad (67)$$

$$1 - 8\pi e^2 \int dp v Y_2 = \omega_0 \partial_{\omega_0} \epsilon^l \quad (68)$$

$$V_1 = - \frac{8\pi e^2 \int dp v^2 Y_2}{1 - 8\pi e^2 \int dp v Y_2} = - \frac{\partial_k \epsilon^l}{\partial_{\omega} \epsilon^l} \quad (69)$$

Interpretando $\alpha_0^{(1)}$ y $\beta_0^{(1)}$ como derivadas de E_0 a primer orden, (3.66) se transforma en la ecuación diferencial

$$i(\partial_t + V_1 \partial_z) E_0 = \frac{c}{B_0 \partial_{\omega_0} \epsilon^l} \left(\frac{k_1}{\omega_1} - \frac{k_2}{\omega_2} \right) E_1 E_2 \equiv H_0 E_1 E_2 \quad (70)$$

que es similar a la obtenida en [83], salvo que aquí retenemos el término en $V_1 \partial_z$. Dado que en el proceso de tres ondas se satisface $k_1 k_2 < 0$ ($k_1 > 0$, $k_2 < 0$) y $|k_1/\omega_1| = |k_2/\omega_2|$ se ve que $H_0 > 0$

$$H_0 = \frac{2c}{B_0 \partial_{\omega_0} \epsilon^l} \frac{k_1}{\omega_1} \approx \frac{\sqrt{\beta} \omega_p}{B_0} \quad (\omega_0 \approx \sqrt{\beta} \omega_p, k_0 \approx 0) \quad (71)$$

Por otra parte el campo longitudinal se determina a partir de

$$(\partial_{\psi\psi} + 1 - \varepsilon^l) E_z^{(2)} = - \frac{c}{B_0} \left(\frac{k_1}{\omega_1} - \frac{k_2}{\omega_2} \right) E_1 E_2^* e^{i(\psi_1 - \psi_2)} \quad (72)$$

de donde resulta

$$E_z^{(2)} = \frac{c}{B_0} \frac{1 - \varepsilon^l(\omega_1 - \omega_2, k_1 - k_2)}{\varepsilon^l(\omega_1 - \omega_2, k_1 - k_2)} \left(\frac{k_1}{\omega_1} - \frac{k_2}{\omega_2} \right) E_1 E_2^* e^{i(k_1 - k_2)z - i(\omega_1 - \omega_2)t} \quad (73)$$

A diferencia del caso en el cual solo se consideran ondas 1, donde $E_z^{(2)} = 0$, en presencia de ondas a existe una respuesta de segundo orden del plasma. Por una parte hay un proceso de decaimiento de ondas 1 en ondas a, ecuación (3.70), y por la otra hay una generación no-lineal de un campo longitudinal a partir de los campos transversales, ecuación (3.73). Observamos que mientras (3.70) es un proceso resonante, dadas las condiciones (3.64), $E_z^{(2)}$ es no resonante. Se puede ver además que $E_z^{(2)}$ no contribuirá en el tercer orden a la condición de ausencia de secularidad longitudinal, dado que no existe ninguna frecuencia ω para la cual $\omega_1 - \omega_2 \pm \omega = \omega_0$ ($\omega = \pm 2\omega_2$ es un término de cuarto orden).

Si por otra parte (3.64) no se satisface, es decir que se trata de ondas no resonantes, la ausencia de secularidad se asegura si

$$\alpha_0^{(1)} + V_1 \beta_0^{(1)} = 0 \quad (74)$$

y por consiguiente la amplitud E_0 es constante en un sistema que se mueve con $V = V_1$, análogamente a (3.24). En $E_z^{(2)}$ aparecerá otro término en la frecuencia $\omega_1 + \omega_2 \neq \omega_0$, con $k_1 + k_2 \neq k_0$, que tampoco contribuirá al tercer orden (para el campo longitudinal) dado que no es posible satisfacer la condición $\psi_1 + \psi_2 = 2\psi_0$ (si $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_0$, debe cumplirse, dadas las relaciones de dispersión, que $k_1 + k_2 \neq 2k_0$).

Ahora pasamos a las ondas transversales a. La corriente transversal a segundo orden es

$$\underline{j}_\perp^{(2)} = \sum_{\pm} e \int dp (\underline{v}_\perp^{(2)} f_0 + \underline{v}_\perp^{(1)} f^{(1)}) \quad (75)$$

donde

$$f^{(1)} \underline{v}_\perp^{(1)} = - \frac{ie c}{B_0} \gamma_1 \left\{ \frac{\omega_2 - v k_2}{\omega_2} [E_0 E_2 e^{i(\psi_0 + \psi_2)} + E_0 E_2^* e^{i(\psi_0 - \psi_2)}] \underline{e}_x - \right. \\ \left. - \frac{\omega_1 - v k_1}{\omega_1} [E_0 E_1 e^{i(\psi_0 + \psi_1)} + E_0 E_1^* e^{i(\psi_0 - \psi_1)}] \underline{e}_y \right\} \quad (76)$$

$$\underline{v}_\perp^{(2)} = \frac{m c^2 \gamma}{e B_0^2} \left[\frac{\omega_1 - v k_1}{\omega_1} (\alpha_1^{(1)} + v \beta_1^{(1)}) e^{i\psi_1} \underline{e}_x + \frac{\omega_2 - v k_2}{\omega_2} (\alpha_2^{(1)} + v \beta_2^{(1)}) e^{i\psi_2} \underline{e}_y \right] + \\ + \frac{m c^2 \gamma i c}{e B_0^3} \left\{ \left[\frac{\omega_0 + \omega_2 - v(k_0 + k_2)}{\omega_2/k_2} E_0 E_2 e^{i(\psi_0 + \psi_2)} + \frac{\omega_0 - \omega_2 - v(k_0 - k_2)}{\omega_2/k_2} E_0 E_2^* e^{i(\psi_0 - \psi_2)} \right] \underline{e}_x + \right. \\ \left. + \left[\frac{\omega_0 + \omega_1 - v(k_0 + k_1)}{\omega_1/k_1} E_0 E_1 e^{i(\psi_0 + \psi_1)} + \frac{\omega_0 - \omega_1 - v(k_0 - k_1)}{\omega_1/k_1} E_0 E_1^* e^{i(\psi_0 - \psi_1)} \right] \underline{e}_y \right\} - \\ - \frac{m c^2 \gamma}{e B_0^2} \left\{ \frac{(\omega - k v)^2}{\omega} \partial_\psi E_x^{(2)} \underline{e}_x + \frac{(\omega - k v)^2}{\omega} \partial_\psi E_y^{(2)} \underline{e}_y \right\} \quad (77)$$

La ecuación de Maxwell para $E_x^{(2)}$ es

$$\begin{aligned}
& (\omega^2 - c^2 k^2) \partial_{\psi\psi} E_x^{(2)} - 2i\omega_1 \left(\alpha_1 + \frac{c^2 k_1}{\omega_1} \beta_1 \right) e^{i\psi_1} = \\
& = i \frac{8\pi mc^2}{B_0^2} \int dp \gamma f_0 \frac{(\omega_1 - k_1 v)^2}{\omega_1} \alpha_1^{(1)} e^{i\psi_1} + \frac{8\pi mc^2}{B_0^2} \int dp \gamma f_0 (\omega_1 - k_1 v) (\alpha_1^{(1)} + v \gamma \beta_1^{(1)}) e^{i\psi_1} - \\
& - \frac{8\pi e^2 c}{B_0} \int dp (\omega_0 + \omega_2) \left[\frac{mc^2 \gamma}{e^2 B_0^2} f_0 \frac{\omega_0 + \omega_2 - v(k_0 + k_2)}{\omega_2 / k_2} - \gamma_1 \frac{\omega_2 - v k_2}{\omega_2} \right] E_0 E_2 e^{i(\psi_0 + \psi_2)} - \\
& - \frac{8\pi e^2 c}{B_0} \int dp (\omega_0 - \omega_2) \left[\frac{mc^2 \gamma}{e^2 B_0^2} f_0 \frac{\omega_0 - \omega_2 - v(k_0 - k_2)}{\omega_2 / k_2} - \gamma_1 \frac{\omega_2 - v k_2}{\omega_2} \right] E_0 E_2^* e^{i(\psi_0 - \psi_2)} - \\
& - \frac{8\pi mc^2}{B_0^2} \int dp \gamma f_0 (\omega - k v)^2 \partial_{\psi\psi} E_x^{(2)}, \tag{78}
\end{aligned}$$

y una ecuación análoga para $E_y^{(2)}$. La ecuación anterior (3.78) puede simplificarse usando las relaciones de dispersión

$$\begin{aligned}
& (\omega^2 \epsilon_{\perp} - c^2 k^2) \partial_{\psi\psi} E_x^{(2)} = 2i \frac{c^2 k_1^2}{\omega_1} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega_0} \langle \gamma - \gamma^{-1} \rangle \right) \left(\alpha_1^{(1)} + \frac{\omega_1}{k_1} \beta_1^{(1)} \right) e^{i\psi_1} - \\
& - \frac{c}{B_0} (\omega_0 + \omega_2) \left[(\omega_0 + \omega_2) \frac{k_2}{\omega_2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \langle \gamma \rangle + \omega_0 \left(\frac{k_0}{\omega_0} - \frac{k_2}{\omega_2} \right) \right] E_0 E_2 e^{i(\psi_0 + \psi_2)} - \\
& - \frac{c}{B_0} (\omega_0 - \omega_2) \left[(\omega_0 - \omega_2) \frac{k_2}{\omega_2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \langle \gamma \rangle + \omega_0 \left(\frac{k_0}{\omega_0} - \frac{k_2}{\omega_2} \right) \right] E_0 E_2^* e^{i(\psi_0 - \psi_2)}. \tag{79}
\end{aligned}$$

En (3.79) aparecen a la derecha las frecuencias ω_1 , $\omega_0 + \omega_2$ y $\omega_0 - \omega_2$; considerando el proceso de tres ondas el término en $\omega_0 - \omega_2$ es secular, por lo tanto

$$2i \frac{c^2 k_1^2}{\omega_1^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_B^2} \langle \gamma - \gamma^{-1} \rangle\right) \left(\alpha_1^{(1)} + \frac{\omega_1}{k_1} \beta_1^{(1)}\right) = \frac{c}{B_0} \left[\frac{\omega_1 k_2}{\omega_2} \frac{\omega_p^2}{\omega_B^2} \langle \gamma \rangle + \omega_0 \left(\frac{k_2}{\omega_0} - \frac{k_1}{\omega_2} \right) \right] E_0 E_2^*, \quad (80)$$

es la condición de ausencia de secularidad a segundo orden para la onda de Alfvén según x . Despreciando términos en $\Gamma^2 = \omega_p^2 / \beta \omega_B^2$, (3.80) puede escribirse

$$i(\partial_t + V_a \partial_z) E_1 = \frac{c}{2B_0} \omega_0 \left(\frac{k_0}{\omega_0} - \frac{k_1}{\omega_2} \right) E_0 E_2^* \equiv H_1 E_0 E_2^*, \quad (81)$$

donde $V_a = \omega_1 / k_1$ ($k_1 > 0$) y H_1 es aproximadamente

$$H_1 \approx \frac{\sqrt{\beta} \omega_p}{2B_0}, \quad (\omega_0 \approx \sqrt{\beta} \omega_p, k_0 \approx 0). \quad (82)$$

El cálculo para la componente y conduce a un resultado similar a (3.80)-(3.81)

$$i(\partial_t - V_a \partial_z) E_2 = \frac{c}{2B_0} \omega_0 \left(\frac{k_1}{\omega_1} - \frac{k_0}{\omega_0} \right) E_0 E_1^* \equiv H_2 E_0 E_2^*, \quad (83)$$

$$H_2 \approx H_1 \approx \frac{\sqrt{\beta} \omega_p}{2B_0}. \quad (84)$$

Los campos de Alfvén a segundo orden serán entonces

$$E_x^{(2)} = \frac{1}{B_0} h_{2+} E_0 E_2 e^{ik_{2+}z - i\omega_{2+}t}, \quad (85)$$

$$E_y^{(2)} = \frac{1}{B_0} h_{1+} E_0 E_1 e^{ik_{1+}z - i\omega_{1+}t}, \quad (86)$$

donde

$$h_{2\pm} = \frac{c \omega_{2\pm}}{\omega_{2\pm}^2 \epsilon_{\perp 2\pm} - c^2 k_{2\pm}^2} \left[\omega_{2\pm} \frac{k_2}{\omega_2} \frac{\omega_p^2}{\omega_B^2} \langle \gamma \rangle + \omega_0 \left(\frac{k_0}{\omega_0} - \frac{k_2}{\omega_2} \right) \right], \quad (87)$$

$$h_{1\pm} = \frac{c \omega_{1\pm}}{\omega_{1\pm}^2 \epsilon_{\perp 1\pm} - c^2 k_{1\pm}^2} \left[\omega_{1\pm} \frac{k_1}{\omega_1} \frac{\omega_p^2}{\omega_B^2} \langle \gamma \rangle - \omega_0 \left(\frac{k_0}{\omega_0} - \frac{k_1}{\omega_1} \right) \right] \quad (88)$$

$$y \quad \omega_{1\pm} = \omega_0 \pm \omega_1, \quad \omega_{2\pm} = \omega_0 \pm \omega_2.$$

Si por el contrario las ondas no son resonantes las condiciones de ausencia de secularidad son

$$\alpha_1^{(1)} + \frac{\omega_1}{k_1} \beta_1^{(1)} = 0, \quad \alpha_2^{(1)} + \frac{\omega_2}{k_2} \beta_2^{(1)} = 0 \quad (89)$$

y los campos

$$E_x^{(2)} = \frac{1}{B_0} h_{2+} E_0 E_2 e^{i\psi_{2+}} + \frac{1}{B_0} h_{2-} E_0 E_2^* e^{i\psi_{2-}}, \quad (90)$$

$$E_y^{(2)} = \frac{1}{B_0} h_{1+} E_0 E_1 e^{i\psi_{1+}} + \frac{1}{B_0} h_{1-} E_0 E_1^* e^{i\psi_{1-}}, \quad (91)$$

y dado que $\psi_{2\pm} \mp \psi_2 = \psi_0$, $\psi_{1\pm} \mp \psi_1 = \psi_0$ estos campos transversales

contribuirán como términos seculares al tercer orden del campo longitudinal. Una estimación grosera de los coeficientes h puede hacerse suponiendo $\omega_{\pm} \approx \sqrt{\beta} \omega_p$, $k_{\pm} \approx 0$, $\epsilon_1 = 1$, con lo cual resultan todos del mismo orden e iguales a la unidad

$$h \approx 1. \quad (92)$$

En definitiva como resultado del cálculo a segundo orden hemos obtenido las ecuaciones (3.70), (3.81) y (3.83) que describen la interacción de una onda de Langmuir l con dos ondas de Alfvén a ; y por otra parte hemos derivado expresiones para los campos electromagnéticos a segundo orden (3.73), (3.90) y (3.91), estos dos últimos son importantes para el cálculo a tercer orden del campo longitudinal.

3.5 LAS INTERACCIONES MODULACIONALES. ECUACIONES DE ONDA NO-LINEALES

Ahora vamos a investigar la inestabilidad modulacional de las ondas de Langmuir en presencia de un campo de ondas de Alfvén. Nos concentramos en el desarrollo a tercer orden para las ondas 1, y en particular nos interesan solo aquellos términos seculares, dado que la remoción de esos términos de la solución de la ecuación para el campo $E_z^{(3)}$, conduce a la ecuación diferencial para la amplitud E_0 .

Veamos cuales son los términos seculares que aparecen en la ecuación de Maxwell

$$(\partial_t E_z)^{(3)} = -4\pi \sum_{\mathbf{p}} e \int dp (v f^{(3)} + v_z^{(2)} f^{(1)} + v_z^{(3)} f_0), \quad (93)$$

$v_z^{(1)} = 0$ y el último término se anula debido a que es proporcional a e . Los términos seculares de $f^{(3)}$ se encuentran usando la ecuación cinética

$$\begin{aligned} -(\omega_0 - k_0 v) \partial_\psi \tilde{f}^{(3)} = & -(\partial_t + v \partial_z)^{(1)} \tilde{f}^{(2)} - (\partial_t + \bar{v}_z \partial_z)^{(2)} \tilde{f}^{(1)} - \\ & - e E_z^{(1)} \partial_p f^{(2)} - e (\bar{E} \cdot \bar{E}_0)^{(3)} \partial_p f_0. \end{aligned} \quad (94)$$

Desarrollamos cada término de (3.94)

$$-(\partial_t + v \partial_z)^{(1)} \tilde{f}^{(2)} = e Y_2 (v - V_L)^2 (\beta_0^{(1)} \partial_{E_0} \beta_0^{(1)} + \beta_0^{(1)*} \partial_{E_0^*} \beta_0^{(1)}) ,$$

$$-(\partial_t + \bar{v} \partial_z)^{(2)} \tilde{f}^{(1)} = ie Y_1 (\alpha_0^{(2)} + v \beta_0^{(2)}) - \frac{ec^2}{B_0^2} k Y_1 \left[\frac{k_1}{\omega_1} \left(1 - \frac{v k_1}{2 \omega_1} \right) |E_1|^2 + \right. \\ \left. + \frac{k_2}{\omega_2} \left(1 - \frac{v k_2}{2 \omega_2} \right) |E_2|^2 \right] E_0$$

$$-e E_z^{(1)} \partial_p f^{(2)} = \frac{e^3}{2} \partial_p \frac{\partial_p Y_1}{\omega_0 - k_0 v} |E_0|^2 E_0$$

$$-e (\tilde{E} \cdot e_0)^{(3)} \partial_p f_0 = \frac{ec}{B_0^2} \partial_p f_0 \left\{ \left[\frac{ck_1^2}{2\omega_1^2} + \left(\frac{k_{1+}}{\omega_{1+}} - \frac{k_1}{\omega_1} \right) h_{1+} + \left(\frac{k_{1-}}{\omega_{1-}} - \frac{k_1}{\omega_1} \right) h_{1-} \right] |E_1|^2 + \right. \\ \left. \frac{ck_2^2}{2\omega_2^2} - \left(\frac{k_{2+}}{\omega_{2+}} - \frac{k_2}{\omega_2} \right) h_{2+} - \left(\frac{k_{2-}}{\omega_{2-}} - \frac{k_2}{\omega_2} \right) h_{2-} \right] |E_2|^2 \right\} E_0$$

Introduciendo estas expresiones en (3.94) obtenemos

$$\tilde{f}^{(3)} = ie Y_3 (v - V_L)^2 (\beta_0^{(1)} \partial_{E_0} \beta_0^{(1)} + \beta_0^{(1)*} \partial_{E_0^*} \beta_0^{(1)}) - e Y_2 (\alpha_0^{(2)} + v \beta_0^{(2)}) + \\ + \frac{ie^3}{2 \omega_0 - k_0 v} \partial_p \frac{\partial_p Y_1}{\omega_0 - k_0 v} |E_0|^2 E_0 + \\ + \frac{iec}{B_0^2} \left\{ \left[Y_1 \left(\frac{ck_1^2}{2\omega_1^2} + \left(\frac{k_{1+}}{\omega_{1+}} - \frac{k_1}{\omega_1} \right) h_{1+} + \left(\frac{k_{1-}}{\omega_{1-}} - \frac{k_1}{\omega_1} \right) h_{1-} \right) - ck_0 \frac{k_1}{\omega_1} Y_2 \left(1 - \frac{v k_1}{2 \omega_1} \right) \right] |E_1|^2 + \right. \\ + \left[Y_1 \left(\frac{ck_2^2}{2\omega_2^2} - \left(\frac{k_{2+}}{\omega_{2+}} - \frac{k_2}{\omega_2} \right) h_{2+} - \left(\frac{k_{2-}}{\omega_{2-}} - \frac{k_2}{\omega_2} \right) h_{2-} \right) - \right. \\ \left. \left. - ck_0 \frac{k_2}{\omega_2} Y_2 \left(1 - \frac{v k_2}{2 \omega_2} \right) \right] |E_2|^2 \right\} E_0 . \quad (95)$$

Además

$$v_z^{(2)} f^{(1)} = - \frac{iec^2}{B_0^2} Y_1 \left[\frac{k_1}{\omega_1} \left(1 - \frac{v k_1}{2 \omega_1} \right) |E_1|^2 + \right. \\ \left. + \frac{k_2}{\omega_2} \left(1 - \frac{v k_2}{2 \omega_2} \right) |E_2|^2 \right] E_0 . \quad (96)$$

Reemplazando (3.95) y (3.96) y teniendo en cuenta que

$$(\partial_t \tilde{E}_z)^{(3)} = \alpha_0^{(2)} \quad (97)$$

ya que $E_z^{(2)}$ no contribuye con términos seculares, se obtiene la

condición de ausencia de secularidad en la solución a tercer orden

$$\begin{aligned}
 & i(1 - 8\pi e^2 \int dp v Y_2) (\alpha_0^{(2)} + V_\ell \beta_0^{(2)}) - 8\pi e^2 \int dp v (v - V_\ell)^2 (\beta_0^{(4)} \partial_E \beta_0^{(4)} + \beta_0^{(4)*} \partial_E \beta_0^{(4)}) = \\
 & = 4\pi e^4 \int dp \frac{v}{\omega_0 - k_0 v} \partial_p \frac{\partial_p Y_1}{\omega_0 - v k_0} |E_0|^2 E_0 + \\
 & + \frac{8\pi e^2 c}{B_0^2} \int dp v \left\{ \left[Y_1 \left(\frac{c k_1^2}{2\omega_1^2} + \left(\frac{k_{1+}}{\omega_{1+}} - \frac{k_1}{\omega_1} \right) h_{1+} + \left(\frac{k_{1-}}{\omega_{1-}} - \frac{k_1}{\omega_1} \right) h_{1-} \right) - c k_0 \frac{k_1}{\omega_1} Y_2 \left(1 - \frac{v k_1}{2\omega_1} \right) \right] |E_1|^2 + \right. \\
 & \left. + \left[Y_1 \left(\frac{c k_2^2}{2\omega_2^2} - \left(\frac{k_{2+}}{\omega_{2+}} - \frac{k_2}{\omega_2} \right) h_{2+} - \left(\frac{k_{2-}}{\omega_{2-}} - \frac{k_2}{\omega_2} \right) h_{2-} \right) - c k_0 \frac{k_2}{\omega_2} Y_2 \left(1 - \frac{v k_2}{2\omega_2} \right) \right] |E_2|^2 \right\} E_0 - \\
 & - \frac{8\pi e^2 c^2}{B_0^2} \int dp Y_1 \left[\frac{k_1}{\omega_1} \left(1 - \frac{v k_1}{\omega_1} \right) |E_1|^2 + \frac{k_2}{\omega_2} \left(1 - \frac{v k_2}{\omega_2} \right) |E_2|^2 \right] E_0. \quad (98)
 \end{aligned}$$

Que podemos reescribir, usando las definiciones siguientes

$$\begin{aligned}
 P &= - \frac{8\pi e^2}{I} \int dp v (v - V_\ell)^2 Y_3, \quad I = 1 - 8\pi e^2 \int dp v Y_2 \\
 Q &= - \frac{4\pi e^2}{I} \int dp \frac{v}{\omega_0 - k_0 v} \partial_p \frac{\partial_p Y_1}{\omega_0 - k_0 v} \quad (99) \\
 q_1 &= - \frac{8\pi e^2 c^2}{I B_0^2} \int dp \left\{ \frac{v}{c} Y_1 \left(\frac{c k_1^2}{\omega_1^2} + \left(\frac{k_{1+}}{\omega_{1+}} - \frac{k_1}{\omega_1} \right) h_{1+} + \left(\frac{k_{1-}}{\omega_{1-}} - \frac{k_1}{\omega_1} \right) h_{1-} \right) - (k_0 v Y_2 + Y_1) \frac{k_1}{\omega_1} \left(1 - \frac{k_1 v}{2\omega_1} \right) \right\} \\
 q_2 &= - \frac{8\pi e^2 c^2}{I B_0^2} \int dp \left\{ \frac{v}{c} Y_1 \left(\frac{c k_2^2}{\omega_2^2} - \left(\frac{k_{2+}}{\omega_{2+}} - \frac{k_2}{\omega_2} \right) h_{2+} - \left(\frac{k_{2-}}{\omega_{2-}} - \frac{k_2}{\omega_2} \right) h_{2-} \right) - (k_0 v Y_2 + Y_1) \frac{k_2}{\omega_2} \left(1 - \frac{k_2 v}{2\omega_2} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

y pasando $\alpha^{(i)}$ y $\beta^{(i)}$ a la forma de derivadas [128]

$$i(\partial_t + V_z \partial_z) E_0 + P \partial_{zz} E_0 + Q |E_0|^2 E_0 + \phi E_0 = 0 \quad (100)$$

donde ϕ es

$$\phi = q_1 |E_1|^2 + q_2 |E_2|^2.$$

Los coeficientes pueden estimarse en particular para ondas de Alfvén resonantes, para las cuales $\omega_0 \approx 2\omega_1 \approx 2\omega_2$, $k_0 \approx 0$, $k_1 \approx -k_2 > 0$ (en este caso hay que imponer $h_- = 0$ dado que proviene de un termino secular de segundo orden)

$$q_1 \approx q_2 \approx \frac{\sqrt{\beta} \omega_p}{2B_0^2} > 0 \quad (101)$$

La ecuación (3.100) es una ecuación de Schrödinger no-lineal, como la que obtuvimos en el límite $B_0 \rightarrow \infty$, con un campo autoconsistente ϕ . En órdenes de magnitud tenemos

$$\phi \approx \sqrt{\beta} \omega_p \frac{|E_1|^2}{B_0^2} = \frac{\beta^{3/2} \omega_p}{8\pi n m c^2} r^2 |E_1|^2 \quad (102)$$

$$Q |E_0|^2 \approx \left(\frac{e}{mc}\right)^2 \frac{\beta^{3/2}}{\omega_p} |E_0|^2 \approx \frac{\beta^{3/2} \omega_p}{8\pi n m c^2} |E_0|^2 \quad (103)$$

Mientras el término $Q |E_0|^2$ proviene del corrimiento de la frecuencia del plasma debido a las rarefacciones de densidad producida por el batido de baja frecuencia de dos ondas de

Langmuir, como lo hemos visto en el Capítulo II, ecuaciones (2.60) y (2.61), el término ϕ corresponde a un efecto similar debido a la presión de radiación de las ondas de Alfvén. Es interesante observar la aparición en (3.102) de la constante Γ^2 (que tiende a cero cuando $B_0 \rightarrow \infty$). En efecto, pasado el régimen inicial de la inestabilidad de haces (muy rápido), cuando $\Gamma_b \approx \Gamma_b^{NL}$ y $W_0^l \rightarrow \beta W_0^l$, y se forma el condensado, las ondas de Langmuir decaen con una tasa de Γ_D en ondas de Alfvén, por lo cual se produce, como lo indicamos en la Sec. 3.1, una cierta densidad de energía de ondas de Alfvén. Podemos estimar $W^a \sim (\Gamma_0/\Gamma_b^{NL}) W^l$, que resulta precisamente $W^a \sim \Gamma^2 W^l$, es decir que la densidad de energía de Alfvén es Γ^2 veces inferior a la densidad de energía de las ondas de Langmuir.

La respuesta del plasma a la acción de la fuerza ponderomotriz del campo longitudinal es estrictamente local. En el plasma no-relativista por el contrario, el campo longitudinal es fuente de fluctuaciones de la densidad, que se propagan con la velocidad del sonido iónico, y por lo tanto el corrimiento en la frecuencia del plasma depende del campo longitudinal de toda la región físicamente conectada. De la misma manera, en este plasma de electrones y positrones magnetizado, el campo longitudinal produce ondas de Alfvén cuyas fluctuaciones de densidad asociadas viajan con la velocidad de Alfvén. De ahí que ϕ sea un campo autoconsistente, dado que su fuente es el propio campo de Langmuir.

Para hallar la ecuación diferencial que conecta $|E_0|^2$ con ϕ recurrimos a las ecuaciones deducidas a segundo orden que describen la interacción de las ondas longitudinales con las de Alfvén, (3.70, 81, 83)

$$i(\partial_t + V_0 \partial_z) E_0 = H_0 E_1 E_2$$

$$i(\partial_t + V_a \partial_z) E_1 = H_1 E_0 E_2^* \quad (104)$$

$$i(\partial_t - V_a \partial_z) E_2 = H_2 E_0 E_1^*$$

y calculamos $(\partial_{tt} - V_a^2 \partial_{zz}) \phi \equiv \square \phi$, usando además las ecuaciones conjugadas de (3.104). Obtenemos la siguiente ecuación para

$$\square \phi = - \frac{H_1 q_1 + H_2 q_2}{H_0} \left(\partial_t + \frac{H_2 q_2 - H_1 q_1}{H_1 q_1 + H_2 q_2} \partial_z \right) (\partial_t + V_0 \partial_z) |E_0|^2 \quad (105)$$

que con las estimaciones anteriores se reduce a

$$\square \phi = - \frac{\beta^{3/2} \omega_p}{8\pi n m c^2} \nabla^2 \partial_t (\partial_t + V_0 \partial_z) |E_0|^2 \quad (106)$$

Ahora adimensionalizamos haciendo los cambios de unidades siguientes

$$t = \sqrt{\beta} \omega_p t, \quad z = \frac{\sqrt{\beta} \omega_p}{c} z, \quad E = (8\pi \beta^{-1} n m c^2)^{-1/2} E, \quad V = V/c$$

y cambiando de escala a ϕ para hacerlo del orden de $|E_0|^2$,

$\phi \rightarrow r^2 \phi$, con lo cual las ecuaciones de onda no-lineales resultan [128]

$$i(\partial_t + v_z \partial_z)E + \frac{1}{2} \partial_{zz} E + (|E|^2 + r^2 \phi)E = 0, \quad (107)$$

$$\square \phi = -\partial_t(\partial_t + v_z \partial_z)|E|^2, \quad (108)$$

(suprimimos el subíndice cero, ya que es irrelevante). Las ecuaciones (3.107) y (3.108) son las ecuaciones básicas sobre las cuales intentaremos describir la turbulencia fuerte en el plasma de la magnetosfera de los pulsars. Estas ecuaciones, que llamaremos S3- ϕ , son formalmente muy parecidas a las ecuaciones S3- δn de Zakharov (2.14,16) en una dimensión, así que se pueden esperar fenómenos similares. Sin embargo debemos recordar que aquí la unidimensionalidad responde al hecho de que el plasma se encuentra en un campo magnético muy fuerte, por lo cual el colapso de Langmuir tal como fue descrito en el Capítulo II no es posible.

Vemos por otra parte, que en (3.107) no han aparecido términos de debilitamiento o amortiguamiento producidos por el decaimiento $\ell \rightarrow a + a$, esto se debe a que no hemos considerado la contribución a la parte imaginaria de la permitividad dieléctrica proveniente de los términos resonantes. Estos términos resonantes están incluidos en q_1 y q_2 a través de los coeficientes h_1 y h_2 definidos en (3.87,88). Para estimar la tasa de debilitamiento Γ_1^{NL} hacemos una aproximación de fases

aleatorias

$$-i\Gamma_L^{NL} = \langle q_1^R | \epsilon_1|^2 + q_2^R | \epsilon_2|^2 \rangle \approx \langle q^R \rangle W^2, \quad (109)$$

donde q_1^R y q_2^R sólo contienen el término resonante en h_1 y h_2 respectivamente. Esencialmente interesa calcular el promedio de h_- , que definimos de la siguiente manera

$$\langle h_- \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\beta} \omega_p \tau} h_- , \quad (110)$$

y el cual se calcula en la resonancia (para la cual $h_- \rightarrow \infty$). Escribimos h_- de la siguiente manera (el cálculo es análogo para h_{2-})

$$h_{1-} = \int d\omega \delta(\omega - \omega_2) \frac{g(\omega, k_2)}{\omega^2 \epsilon_1 - c^2 k_2^2}, \quad (111)$$

donde

$$g(\omega, k_2) = c\omega \left[\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \langle r \rangle \frac{\omega k_1}{\omega_1} + \omega_0 \left(\frac{k_1}{\omega_1} - \frac{k_0}{\omega_0} \right) \right] \approx \omega_0 \omega ,$$

y usamos

$$\text{Im} \frac{1}{\omega^2 \epsilon_1 - c^2 k^2} = -\pi \delta(\omega^2 \epsilon_1 - c^2 k^2) = -\frac{\pi \delta(\omega - \omega_2)}{|2\omega_2 (1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \langle r \rangle)|} \approx -\frac{\pi}{2\omega_2} \delta(\omega - \omega_2), \quad (112)$$

al reemplazar en (3.111) queda una función δ al cuadrado que calculamos usando la fórmula

$$\delta^2(\omega - \omega_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau}{2\pi} \delta(\omega - \omega_0), \quad (113)$$

con lo cual

$$\langle h_{+-} \rangle \approx -\frac{i}{4}, \quad (114)$$

es decir que la tasa de debilitamiento de las ondas de Langmuir debido a su decaimiento en ondas de Alfvén es aproximadamente

$$-\Gamma_L^{NL} \approx \frac{\sqrt{\beta} \omega_p}{B_0^2} W^2 = \beta^{3/2} \omega_p \Gamma^2 \frac{W^2}{8\pi n m c^2}, \quad (115)$$

y la ecuación (3.107) se transforma de la siguiente manera

$$i(\partial_t + v_L \partial_z - \Gamma_L^{NL})E + \frac{1}{2} \partial_{zz} E + (|E|^2 + \Gamma^2 \Phi)E = 0. \quad (116)$$

3.6 SOLITONES

Es conocido que la ecuación S3 así como la S3- δn tienen soluciones tipo solitón, en las cuales la amplitud del campo eléctrico tiene la siguiente forma [77][107]

$$E = E_0 \operatorname{sech} k_0 \zeta e^{i\chi}, \quad (117)$$

donde la amplitud E_0 y el ancho k_0^{-1} son parámetros que caracterizan al solitón, y $\zeta = z - Vt - z_0$, V es la velocidad del solitón, z_0 es la coordenada fija al solitón, y $\chi = Kz - \Omega t + \chi_0$ es una fase, z_0 y χ_0 indican valores iniciales.

Veamos que (3.117) es solución de S3- ϕ . En primer lugar reescribimos las ecuaciones haciendo

$$E = E(\zeta) e^{i\chi}, \quad \phi = \phi(\zeta) \quad (118)$$

con lo cual obtenemos para la parte real

$$\frac{1}{2} \partial_{\zeta\zeta} E(\zeta) = \left[\frac{K^2}{2} - (\Omega - KV_L) \right] E(\zeta) - E(\zeta)^3 - \Gamma^2 \phi(\zeta) E(\zeta) \quad (119)$$

$$\phi(\zeta) = g E(\zeta)^2 \quad (120)$$

donde

$$g = \frac{V^2 - V_L V}{V_a^2 - V^2},$$

y para la parte imaginaria

$$K = V - V_L. \quad (121)$$

Reemplazando en (3.119, 120) la ecuación (3.117) se obtienen las siguientes expresiones, el ancho y la amplitud del solitón están vinculadas por

$$k_o^2 = (1 + g \Gamma^2) E_o^2, \quad (122)$$

y la relación de dispersión es

$$\Omega - K V_L = \frac{K^2}{2} - \frac{1}{2} (1 + g \Gamma^2) E_o^2, \quad (123)$$

además el campo ϕ es

$$\phi = g E_o^2 \operatorname{sech}^2 k_o \zeta. \quad (124)$$

Veamos cómo surge la solución (3.117), cuando se buscan ondas viajeras como (3.118). La ecuación (3.119) puede reescribirse de la siguiente manera

$$\partial_{\zeta\zeta} E(\zeta) = \frac{1}{2} \partial_{\zeta} (\partial_{\zeta} E)^2 = a E - b E^3, \quad (125)$$

donde

$$a = K^2 - 2(\Omega - V_L), \quad b = 2(1 + g \Gamma^2)$$

o efectuando una integración

$$H = \frac{1}{2} \partial_z E^2 + \frac{b}{4} E^4 - \frac{a}{2} E^2, \quad (126)$$

donde H es la constante de integración. La ecuación (3.126) puede interpretarse como la expresión de la energía total, suma de una energía cinética $\frac{1}{2}(\partial_z E)^2$ más una potencial

$$U(E) = \frac{b}{4} E^4 - \frac{a}{2} E^2 \quad (127)$$

Este potencial tiene una raíz doble en $E=0$ y dos raíces $E = \pm \sqrt{\frac{2a}{b}}$, tiene además dos mínimos en $E = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}$ (Fig. 3.2). La solución tipo solitón corresponde a $H=0$. En este caso la integral de (3.126) es

$$\zeta = \frac{1}{a} \int_{E(0)}^{E(\zeta)} \frac{dE}{E \left(1 - \frac{b}{2a} E^2\right)^{1/2}}. \quad (128)$$

Ahora bien, mientras $E = \pm \sqrt{\frac{2a}{b}}$ son puntos de retorno de la función $\zeta(E)$ y por lo tanto $\zeta(\pm \sqrt{\frac{2a}{b}}) = 0$, como se observa en la Fig. 3.3, para $E=0$, $\zeta(E)$ diverge, es decir que los límites de (3.128) no deben contener $E=0$. La solución de tipo solitón es una solución ligada, situada alrededor de uno de los dos mínimos del potencial (posee menor simetría que el potencial $U(E)$). Integrando entonces (3.128) entre $E(0) = \pm \sqrt{\frac{2a}{b}}$ y $E(\zeta)$ se obtiene

$$\zeta = \frac{1}{a} \operatorname{Arsech} \sqrt{\frac{b}{2a}} E, \quad (129)$$

que coincide, una vez hecha la inversa, con (3.117).

IV. TURBULENCIA FUERTE DEL PLASMA DE LA MAGNETOSFERA DE LOS PULSARS

4.1 INTRODUCCION. METODO KT.

Aparte del método KBM existen otros métodos perturbativos que permiten deducir las ecuaciones para las modulaciones de baja frecuencia, a partir de las ecuaciones cinéticas [129]. El método KBM es limitado en el sentido de que permite trabajar con un número pequeño de paquetes de onda fuertemente centrados alrededor de alguna frecuencia característica, y por lo tanto no permite deducir las ecuaciones de la turbulencia débil. Vimos que se trabaja en el espacio (r, t) y no en el espacio de Fourier (k, ω) . Khakimov y Tsytovich (KT) han desarrollado un método [66][123][12] que permite tratar consistentemente todos los efectos no-lineales [103] tanto las interacciones onda-onda, onda-partícula, etc., como las interacciones modulantes. Para ilustrar como funciona el formalismo KT deduciremos nuevamente la ecuación S3 en las condiciones tratadas en la Sec. 3.2, es decir a partir de

$$(\partial_t + v \partial_z + eE \partial_p) f(z, p, t) = 0, \quad (1)$$

$$\partial_t E = -4\pi \sum_{\pm} e \int dp v f(z, p, t). \quad (2)$$

La función de distribución, y por lo tanto la corriente se

desarrollan en potencias del campo eléctrico. Antes de hacer esto aclararemos algunas cuestiones de notación:

-transformada de Fourier

$$E_k = E(k, \omega) = \int \frac{dz dt}{(2\pi)^2} E e^{i\omega t - ikz}$$

-el subíndice k indica el par ordenado k, ω ,

-definimos

$$d_{12} = dk_1 dk_2 d\omega_1 d\omega_2 \delta(k - k_1 - k_2) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)$$

de la misma manera definimos d_{123} .

-aclaramos que el campo eléctrico que aparece en (4.1,2) es el campo eléctrico total y no sólo su amplitud lentamente variable, que después denominaremos con el mismo símbolo.

Nos proponemos resolver (4.1,2) mediante un proceso iterativo, desarrollando la función de distribución en potencias de E_k

$$f_k = f_0(p) + \sum_{i \geq 1} f_k^{(i)} \quad , \quad f_k^{(1)} = - \frac{ie}{\omega - kv} E_k \partial_p f_0 \quad , \quad (3)$$

$$f_k^{(i)} = - \frac{ie}{\omega - kv} \int d_{12} E_{k_1} \partial_p f_{k_2}^{(i-1)} .$$

La ecuación de Maxwell (4.2) puede escribirse como

$$\omega \epsilon_k^L E_k = \frac{4\pi}{i} j_k^{NL} \quad (4)$$

donde j_k^{NL} es la corriente no-lineal, de la cual calcularemos el tercer orden. Las funciones de distribución cuadrática y cúbica son

$$f_k^{(2)} = -\frac{e^2}{2} \int d_{12} \frac{1}{\omega - kv} \partial_p \left(\frac{1}{\omega_2 - k_2 v} + \frac{1}{\omega_1 - k_1 v} \right) \partial_p f_0 E_{k_1} E_{k_2}, \quad (5)$$

$$f_k^{(3)} = \frac{ie^3}{2} \int d_{123} \frac{1}{\omega - kv} \partial_p \frac{1}{\omega_2 + \omega_3 - (k_2 + k_3)v} \partial_p \left(\frac{1}{\omega_2 - k_2 v} + \frac{1}{\omega_3 - k_3 v} \right) \partial_p f_0 E_{k_1} E_{k_2} E_{k_3}. \quad (6)$$

Con lo cual (4.4) resulta

$$\omega \varepsilon_k^I E_k = \int d_{123} \Sigma_{1(23)} E_{k_1} E_{k_2} E_{k_3}, \quad (7)$$

donde $\Sigma_{1(23)} = \Sigma_k k_1 (k_2 k_3)$ es simétrico respecto de sus últimos dos índices, está definido por

$$\Sigma_{1(23)} = 4\pi e^4 \int dp \frac{v}{\omega - kv} \partial_p \frac{1}{\omega - \omega_1 - (k - k_1)v} \partial_p \left(\frac{1}{\omega_2 - k_2 v} + \frac{1}{\omega_3 - k_3 v} \right) \partial_p f_0, \quad (8)$$

y describe la respuesta no-lineal del plasma; (4.7) es exacta y contiene todos los fenómenos no-lineales hasta tercer orden, en el marco de las ecuaciones de Vlasov-Maxwell para campos longitudinales. Recalcamos que en el plasma de electrones y positrones no hay corriente de segundo orden como se deduce de (4.5). Estamos interesados en las interacciones modulantes, es decir en describir la evolución de la amplitud lentamente variable

$$E(z, t) = \int dk d\omega E_k e^{ikz - i\omega t} e^{i\omega_0 t - ik_0 z}, \quad \omega_0 = \omega(k_0), \quad (9)$$

como resultado de las perturbaciones de baja frecuencia que resultan de la superposición de campos de alta frecuencia conjugados. Desdoblamos, entonces, el campo de Langmuir (de alta frecuencia) E_k^{HF} en una parte de frecuencia positiva E_k^+ y otra

negativa E_k^- . Debido a la ausencia de corriente de segundo orden no existe campo de baja frecuencia, es decir $E_k = E_k^{HF}$. Por lo tanto debemos reemplazar en (4.7) la ecuación

$$E_k = E_k^+ + E_k^-, \quad (10)$$

veremos que aparecen dos tipos de términos: $E_1^+ E_2^+ E_3^-$ y $E_1^- E_2^+ E_3^+$. Sin embargo, si recordamos que $\omega_0 \approx \sqrt{\beta} \omega_p$ y $k_0 \approx 0$, resulta que es dominante el término con E_1^+ , dado que en este caso el segundo denominador de (4.8) es más pequeño (del orden de $k_0 c$). Por lo tanto, (4.7) se reduce a

$$\omega E_k^+ = \int d_{123} \sum_{1(23)} E_{k_1}^+ E_{k_2}^+ E_{k_3}^-, \quad (11)$$

Ahora deduciremos una expresión aproximada para \sum , teniendo en cuenta $\omega \approx \sqrt{\beta} \omega_p$, $p \approx mc\beta^{-1}$, $k \approx 0$

$$\sum_{1(23)} \approx 4\pi e^2 \frac{2}{\beta \omega_p^2} \frac{\beta^2}{m^2 c^2} \frac{\sqrt{\beta} \omega_p (\epsilon_{k-k_1-k_2}^1 - 1)}{8\pi e^2} \approx -\left(\frac{e}{mc}\right)^2 \frac{\beta^{3/2}}{\omega_p} \quad (12)$$

Usando (4.12), la anti-transformada de (4.11) nos conduce a la ecuación de Schrödinger no-lineal para la amplitud (4.9) del campo eléctrico longitudinal de Langmuir

$$i(\partial_t + V_\ell \partial_z) E + \frac{c^2}{2\sqrt{\beta} \omega_p} \partial_{zz} E = -\left(\frac{e}{mc}\right)^2 \frac{\beta^{3/2}}{\omega_p} |E|^2 E. \quad (13)$$

La ecuación S3 es capaz de describir el comportamiento del plasma bajo perturbaciones de baja frecuencia, es decir del condensado de Langmuir modulacionalmente inestable. Esto puede ser mostrado linealizando (4.13) y observando la relación de dispersión [35],

que resulta del tipo

$$\Omega - KV_0 = \pm K \left(\frac{1}{4} K^2 - \epsilon_0^2 \right)^{1/2} \quad (14)$$

(en unidades adimensionales segun la Sec. 3.5). Si el corrimiento no-lineal de la frecuencia ϵ_0^2 excede el término dispersivo K^2 , o en otras palabras, si una cantidad suficiente de energía es depositada en el condensado $W_k > (\Delta k)^2$, este condensado de ondas de Langmuir es inestable frente a perturbaciones modulacionales y la turbulencia pasa a un estado de turbulencia fuerte.

Por otra parte, debido al hecho de que en un plasma de electrones y positrones el brazo iónico-acústico de oscilaciones está ausente, la respuesta de las partículas del plasma -- fluctuaciones de densidad del plasma -- a la fuerza ponderomotriz $\sim \partial_x |E|^2$ es rigurosamente estática, la respuesta es local. Por consiguiente, no hay campo escalar de interacción, como las fluctuaciones de densidad en un plasma no-relativista de iones y electrones, y por lo tanto una perturbación de amplitud finita arbitraria no conducirá a la formación de solitones, sino que el sistema oscilará alrededor del estado del solitón [77]. Entonces puede concluirse que, a pesar que S3 constituye una descripción completa de las interacciones modulacionales en un plasma de electrones y positrones en un campo magnético superfuerte, es insuficiente para describir la excitación de la turbulencia de solitones. Para describir la generación y el desarrollo de la turbulencia fuerte es necesario abandonar la suposición de un

campo magnético infinito y considerar el efecto de la rama de Alfvén, y la posibilidad de que el campo de ondas de Alfvén afecte las interacciones modulacionales actuando como un campo mediador auto-consistente.

4.2 DERIVACION DE LAS ECUACIONES S3- ϕ

El sistema de ecuaciones básicas de la Sec. 3.3 se complementa con las siguientes definiciones

$$\underline{E} = \underline{E}_1 + E_z \underline{e}_z, \quad (15)$$

$$\underline{E} \cdot \underline{e}_0 = E_z + \frac{\underline{E} \cdot \underline{B}}{B_0} - \frac{E_z B^2}{2B_0^2}, \quad (16)$$

$$\underline{\mu} = \left(v - \frac{B^2}{2B_0^2} \right) \underline{e}_z + v \frac{\underline{B}}{B_0} + \frac{c}{B_0} \underline{E} \wedge \left(\underline{e}_z + \frac{\underline{B}}{B_0} \right). \quad (17)$$

La función de distribución de primer orden coincide con la del caso puramente longitudinal, mientras que la de segundo orden resulta de

$$-i(\omega - kv) f_k^{(2)} = -\frac{ie}{B_0} (\underline{E} \cdot \underline{B})_k \partial_p f_0 - e(E_z \partial_p f^{(1)})_k \quad (18)$$

para el primer término de la derecha debemos tener en cuenta que

$$\underline{B}_k = -\frac{ck}{\omega} \underline{E}_k \wedge \underline{e}_z \quad (19)$$

$$(\underline{E} \cdot \underline{B})_k = -c \int d_{12} \frac{k_1}{\omega_1} (\underline{E}_{k_1} \wedge \underline{e}_z) \cdot \underline{E}_{k_2} \quad (20)$$

con lo cual

$$f_k^{(2)} = \frac{iec}{2B_0} \frac{\partial_p f_0}{\omega - kv} \int d_{12} \left(\frac{k_1}{\omega_1} - \frac{k_2}{\omega_2} \right) \underline{E}_{k_1} \cdot (\underline{E}_{k_2} \wedge \underline{e}_z) - \frac{e^2}{2} \int d_{12} \frac{1}{\omega - kv} \partial_p \left(\frac{1}{\omega_1 - k_1 v} + \frac{1}{\omega_2 - k_2 v} \right) \partial_p f_0 E_{k_1} E_{k_2} \quad (21)$$

A tercer orden la ecuación de Vlasov se escribe

$$-i(\omega - kv) f_k^{(3)} - \frac{v}{2B_0^2} (B^2 \partial_p f^{(1)})_k = -e(E_z \partial_p f^{(2)})_k - e(\underline{E} \cdot \underline{B} \partial_p f^{(1)})_k + \frac{e}{2B_0^2} (B^2 E_z)_k \partial_p f_0. \quad (22)$$

Usando la formula

$$(ABC)_k = \int d_{123} A_{k_1} B_{k_2} C_{k_3},$$

obtenemos

$$(B^2 \partial_z f^{(1)})_k = ec^2 \int d_{123} \frac{k_1 k_2 k_3}{\omega_1 \omega_2} \frac{\partial_p f_0}{\omega_3 - k_3 v} (\mathbb{E}_{\perp k_1} \cdot \mathbb{E}_{\perp k_2}) E_{zk_3},$$

$$(B^2 E_z)_k = c^2 \int d_{123} \frac{k_2 k_3}{\omega_2 \omega_3} (\mathbb{E}_{\perp k_2} \cdot \mathbb{E}_{\perp k_3}) E_{zk_1}.$$

El primer término de la derecha de (4.22) conduce a (4.6), mientras que el segundo término no contribuye a la corriente, así que mediante las fórmulas anteriores obtenemos

$$f_k^{(3)} = \frac{iec^2}{2B_0^2} \int d_{123} \frac{\partial_p f_0}{\omega - kv} \frac{\omega_1}{\omega_1 - k_1 v} \frac{k_2 k_3}{\omega_2 \omega_3} E_{zk_1} (\mathbb{E}_{\perp k_2} \cdot \mathbb{E}_{\perp k_3}) - e (E_z \partial_p f^{(1)})_k \quad (23)$$

A su vez la corriente no-lineal longitudinal es

$$j_z^{NL} = \sum_{\pm} e \int dp \left[v f^{(3)} - \frac{v B^2}{2B_0^2} f^{(1)} + \frac{c}{B_0^2} (\mathbb{E} \wedge \mathbb{B})_z f^{(1)} \right] + \sum_{\pm} e \int dp v f^{(2)}, \quad (24)$$

para cuyo cálculo recurrimos a las siguientes relaciones

$$(\mathbb{E} \wedge \mathbb{B})_{zk} = c \int d_{12} \frac{k_2}{\omega_2} (\mathbb{E}_{\perp k_1} \cdot \mathbb{E}_{\perp k_2}),$$

$$(B^2 f^{(1)})_k = -iec^2 \int d_{123} \frac{\partial_p f_0}{\omega_1 - k_1 v} \frac{k_2 k_3}{\omega_2 \omega_3} E_{zk_1} (\mathbb{E}_{\perp k_2} \cdot \mathbb{E}_{\perp k_3}),$$

con lo cual obtenemos

$$j_{zk}^{NL} = \frac{2ie^2 c}{2B_0} \int dp \int d_{12} \frac{v \partial_p f_0}{\omega - kv} \left(\frac{k_1}{\omega_1} - \frac{k_2}{\omega_2} \right) \mathbb{E}_{k_1} \cdot (\mathbb{E}_{k_2} \wedge \mathbb{e}_z) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{ie^2 c^2}{B_0^2} \int dp \int d_{123} \frac{v \partial_p f_0}{\omega - kv} \frac{k_2 k_3}{\omega_2 \omega_3} \frac{\omega + \omega_1 - kv - \frac{2\omega_3}{k_3 v} (\omega - kv)}{\omega_1 - k_1 v} E_{zk_1} (E_{\perp k_2} \cdot E_{\perp k_3}) + \\
& + ie^4 \int dp \int d_{123} \frac{v}{\omega - kv} \partial_p \frac{1}{\omega - \omega_1 - (k - k_1)v} \partial_p \left(\frac{1}{\omega_2 - k_2 v} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\omega_3 - k_3 v} \right) \partial_p f_0 E_{zk_1} E_{zk_2} E_{zk_3}.
\end{aligned} \tag{25}$$

El primer término de (4.25) es la respuesta no-lineal de segundo orden del plasma, que como vemos contiene solo campos transversales. Como era de esperarse en esta teoría no se desvanece la corriente de segundo orden, la cual describe tanto el decaimiento en ondas de Alfvén de las ondas de Langmuir como la modulación de baja frecuencia (efecto ponderomotriz de las ondas de Alfvén) que como veremos aparecerá como un campo virtual de interacción.

Por otra parte debemos calcular la corriente transversal a segundo orden

$$j_{\perp}^{NL} = \sum_{\pm} e \int dp \left(\bar{u}_{\perp}^{(2)} f_0 + \bar{u}_{\perp}^{(1)} f^{(1)} \right), \tag{26}$$

$$j_{\perp}^{NL} = \sum_{\pm} e \int dp \left[-\frac{mc^2 \gamma}{e B_0^2} (\partial_t + v \partial_z) (\underline{E} \wedge \underline{B}) \wedge \underline{e}_z f_0 + \left(v \frac{B}{B_0} + \frac{c}{B_0} \underline{E} \wedge \underline{e}_z \right) f^{(1)} \right],$$

donde vemos que

$$(\overline{U}_1^{(1)} f^{(1)})_k = -\frac{iec}{B_0} \int d_{12} \frac{\partial p f_0}{\omega_1 - k_1 v} \left(1 - \frac{v k_2}{\omega_2}\right) E_{zk_1} (\underline{E}_{k_2} \wedge \underline{e}_z),$$

$$\overline{U}_1^{(2)} = -i \frac{mc^3 \gamma}{e B_0^3} \int d_{12} (\omega - kv) \frac{k_2}{\omega_2} E_{zk_1} \underline{E}_{\perp k_2},$$

y por lo tanto

$$j_{\perp k}^{NL} = \frac{ic}{4\pi B_0} \int d_{12} \omega_1 (1 - \epsilon_{k_1}^l) \left(\frac{k_1}{\omega_1} - \frac{k_2}{\omega_2}\right) E_{zk_1} (\underline{E}_{k_2} \wedge \underline{e}_z) - 2i \frac{mc^3 \gamma}{\beta B_0^3} \omega \int d_{12} \frac{k_2}{\omega_2} E_{zk_1} \underline{E}_{\perp k_2} \quad (27)$$

Mientras el primer término de (4.27) está ligado al proceso $l \rightarrow a + a$, el segundo término es del orden η^3 y por lo tanto despreciable, no satisface $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$, $k_0 = k_1 + k_2$ las leyes de conservación del proceso de tres ondas, sino que describe otro proceso no-lineal como es la generación de campo transversal como respuesta a la coalescencia de ondas longitudinales y transversales de otra frecuencia $\omega_1' = \omega_0 + \omega_1$, así que en lo sucesivo no lo tendremos en cuenta.

Ahora estamos en condiciones de escribir las ecuaciones de Maxwell a tercer orden perturbativo

$$\omega \epsilon_k^l E_{zk} = \frac{4\pi}{i} j_{zk}^{NL}, \quad (28)$$

$$(\omega^2 \epsilon_{\perp k} - c^2 k^2) \underline{E}_{\perp k} = -4\pi i \omega j_{\perp k}^{NL}, \quad (29)$$

en las cuales reemplazamos (4.25) y (4.27)

$$\omega \epsilon_k^l E_{zk} = \int d_{12} S_{12} \underline{E}_{k_1} \cdot (\underline{E}_{k_2} \wedge \underline{e}_z) + \int d_{123} \sum_{1(23)}^a E_{zk_1} (\underline{E}_{\perp k_2} \cdot \underline{E}_{\perp k_3}) + \int d_{123} \sum_{1(23)}^l E_{zk_1} E_{zk_2} E_{zk_3}, \quad (30)$$

$$(\omega^2 \epsilon_{\perp k} - c^2 k^2) \underline{E}_{\perp k} = \int d_{12} T_{12} E_{zk_1} (\underline{E}_{k_2} \wedge \underline{e}_z), \quad (31)$$

donde hemos introducido las respuestas no-lineales

$$S_{12} = -S_{21} = \frac{c}{2B_0} \omega (1 - \epsilon_k^l) \left(\frac{k_1}{\omega_1} - \frac{k_2}{\omega_2} \right), \quad S_{12} \equiv S_{k,k_1,k_2}, \quad (32)$$

$$T_{12} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{1 - \epsilon_{k_1}^l}{1 - \epsilon_{k_2}^l} T_{21} = \frac{c\omega}{B_0} \omega_1 (1 - \epsilon_{k_1}^l) \left(\frac{k_1}{\omega_1} - \frac{k_2}{\omega_2} \right), \quad T_{12} \equiv T_{k,k_1,k_2}, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{1(23)}^a = \frac{4\pi e^2 c}{B_0^2} \int dp \frac{v \partial_p f_0}{\omega - kv} \frac{k_2 k_3}{(\omega_1 - k_1 v) \omega_2 \omega_3} \left[\omega - kv + \omega_1 - \right. \\ \left. - \frac{\omega - kv}{v} \left(\frac{\omega_2}{k_2} + \frac{\omega_3}{k_3} \right) \right], \end{aligned} \quad (34)$$

$$\Sigma_{1(23)}^a = \Sigma_{k,k_1,(k_2,k_3)}^a$$

y $\Sigma_{1(23)}^l$ coincide con (4.8), usando la relación de dispersión para las ondas longitudinales reescribimos (4.34) de la siguiente manera

$$\Sigma_{1(23)}^a = \frac{c^2}{2B_0^2} \omega_1 (1 - \epsilon_{k_1}^l) \frac{k_2 k_3}{\omega_2 \omega_3} \left[\frac{k_1}{\omega_1} \left(\frac{\omega_2}{k_2} + \frac{\omega_3}{k_3} \right) - 1 + \frac{4\pi e^l}{1 - \epsilon_{k_1}^l} \int dp \frac{v \partial_p f_0}{(\omega - kv)(\omega_1 - k_1 v)} \right]. \quad (35)$$

Las ecuaciones (4.30, 31) son exactas a tercer orden en el campo eléctrico, incluyendo todos los efectos no-lineales y de partículas resonantes. Para derivar las ecuaciones para las amplitudes lentamente variables, es decir para estudiar la evolución de paquetes de onda con frecuencias cecanas a alguna frecuencia determinada, escribimos el campo eléctrico como una superposición de tres ondas las cuales oscilan con frecuencias ω_0 (ondas l), ω_1 y ω_2 (ondas a) y poseen amplitudes E_{20} , E_{x1} y E_{y2} respectivamente

$$E_{20}(z,t) = \int dk d\omega E_{zk} e^{ikz - i\omega t} e^{i\omega_0 t - ik_0 z}, \quad \omega_0 = \omega(k_0),$$

$$E_{x1}(z,t) = \int dk d\omega E_{xk} e^{ikz-i\omega t} e^{i\omega_1 t - ik_1 z}, \quad \omega_1 = \omega^a(k_1), \quad (36)$$

$$E_{y2}(z,t) = \int dk d\omega E_{yk} e^{ikz-i\omega t} e^{i\omega_2 t - ik_2 z}, \quad \omega_2 = \omega^a(k_2).$$

Además, en estas componenetes separamos partes de frecuencias positivas y negativas, teniendo en cuenta que no hay campos longitudinales de baja frecuencia como el campo iónico-acústico en los plasmas no-relativistas, sino que es el campo transversal el que juega el papel de campo de baja frecuencia de interacción. Esto establece una diferencia con el formalismo usual [66][123][12] en el cual se consideran normalmente ondas de un solo tipo que son a su vez fuentes de un campo virtual de interacción, como las fluctuaciones de densidad [66] o las fluctuaciones de corriente que generan campos magnéticos [12]. Aquí consideramos tres ondas y estudiamos sus interacciones. El sistema de ecuaciones completo es el siguiente

$$\omega \epsilon_k^l E_{zk}^+ = \int d_{12} S_{12} [\underline{E}_{k_1}^{++} \cdot (\underline{E}_{k_2}^- \wedge \underline{e}_z) + \underline{E}_{k_1}^{+-} \cdot (\underline{E}_{k_2}^+ \wedge \underline{e}_z)] + \int d_{123} \sum_{123}^a E_{zk_1}^+ (\underline{E}_{1k_2}^+ \cdot \underline{E}_{1k_3}^-) + \int d_{123} \sum_{123}^l E_{zk_1}^+ E_{zk_2}^+ E_{zk_3}^-, \quad (37)$$

$$(\omega^2 \epsilon_{1k} - c^2 k^2) \underline{E}_{1k}^{++} = \int d_{12} T_{12} E_{zk_1}^+ (\underline{E}_{k_2}^+ \wedge \underline{e}_z), \quad (38)$$

$$(\omega^2 \epsilon_{1k} - c^2 k^2) \underline{E}_{1k}^{+-} = \int d_{12} T_{12} E_{zk_1}^+ (\underline{E}_{k_2}^- \wedge \underline{e}_z), \quad (39)$$

$$\omega \epsilon_k^l E_{zk}^{++} = \int d_{12} S_{12} \underline{E}_{k_1}^+ \cdot (\underline{E}_{k_2}^+ \wedge \underline{e}_z). \quad (40)$$

Llamando ω^l y ω^a las frecuencias de las ondas de Langmuir y de

Alfvén respectivamente, es decir $\omega^l = \omega_0$, $\omega^a = \omega_1, \omega_2$, podemos identificar las frecuencias alrededor de las cuales oscilan los campos E_{zk} y $E_{\perp k}$ que aparecen en (4.37)-(4.40)

-campos transversales de segundo orden:

$$E_{\perp k}^{++} \rightarrow \omega^l + \omega^a, \quad E_{\perp k}^{+-} \rightarrow \omega^l - \omega^a,$$

-campo longitudinal:

$$E_{zk}^{++} \rightarrow \omega^a + \omega^a.$$

Por lo tanto recordando que para el proceso de tres ondas $l \rightarrow a+a$ se satisfacen

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2, \quad k_0 = k_1 + k_2, \quad (41)$$

identificamos a (4.39,40) como las ecuaciones que describen este proceso entre ondas resonantes. Por otra parte $E_{\perp k}^{++}$ y $E_{\perp k}^{+-}$ aparecen en (4.37) como campos virtuales, que están vinculados a la dinámica de la inestabilidad modulacional.

Dado que en (4.39,40) intervienen ondas resonantes, vale

$$\omega \epsilon_k^l \geq 0, \quad \omega^2 \epsilon_{\perp k} - c^2 k^2 \geq 0,$$

por lo cual desarrollamos los miembros izquierdos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \epsilon_k^l &= (\partial_\omega \epsilon_k^l)_{\omega_0} \Delta\omega + (\partial_k \epsilon_k^l)_{k_0} \Delta k = (\Delta\omega - V_l \Delta k) \partial_\omega \epsilon_k^l, \\ \omega^2 \epsilon_{\perp k} - c^2 k^2 &= (\partial_\omega \omega^2 \epsilon_{\perp k})_{\omega_0} \Delta\omega + (\partial_k (\omega^2 \epsilon_{\perp k} - c^2 k^2))_{k_0} \Delta k \approx \\ &\approx 2\omega^a (\Delta\omega - V_a \Delta k). \end{aligned} \quad (42)$$

En los miembros derechos usamos las expresiones aproximadas de las respuestas no-lineales

$$S_{12} \approx \frac{\sqrt{\beta} \omega_p}{B_0}, \quad T_{12} \approx \frac{\sqrt{\beta} \omega_p \omega^a}{B_0}, \quad (43)$$

y escribimos los campos en la forma

$$E_k = E_{\Delta k}(z, t) \delta(k - k_0) \delta(\omega - \omega(k_0)) \quad (44)$$

donde k_0 y $\omega(k_0)$ satisfacen la relación de dispersión correspondiente al campo E_k . Estas operaciones nos conducen a las ecuaciones diferenciales que describen el decaimiento de una onda de Langmuir en dos ondas de Alfvén, que una vez adimensionalizadas resultan

$$\begin{aligned} i(\partial_t + V_l \partial_z) E_{z0} &= \Gamma E_{x1} E_{y2}, \\ i(\partial_t + V_a \partial_z) E_{x1} &= \frac{\Gamma}{2} E_{z0} E_{y2}^*, \\ i(\partial_t - V_a \partial_z) E_{y2} &= \frac{\Gamma}{2} E_{z0} E_{x1}^*, \end{aligned} \quad (45)$$

donde además hemos tenido en cuenta que

$$k_1 k_2 < 0, \quad |k_1 / \omega_1| = |k_2 / \omega_2| = V_a^{-1} \approx C^{-1},$$

y

$$(\partial_\omega \epsilon_k^l)_{\omega_0} \approx 2 / \sqrt{\beta} \omega_p,$$

V^l y V^a son las velocidades de grupo de las ondas l y a.

Con el objeto de encontrar las ecuaciones que describan las interacciones modulantes sustituimos (4.38) y (4.40) en (4.37),

con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} \omega \epsilon_k^l E_{zk}^+ = & \int d_{123} \left[\frac{S_{k,k_1+k_3,k_2} T_{k,k_1,k_3}}{(\omega_1+\omega_3)^2 \epsilon_{\perp k_1+k_3} - c^2(k_1+k_3)^2} + \right. \\ & + \frac{S_{k,k_1+k_2,k_3} T_{k,k_1,k_2}}{(\omega_1+\omega_2)^2 \epsilon_{\perp k_1+k_2} - c^2(k_1+k_2)^2} + \\ & \left. + \sum_{123}^a \right] E_{zk_1}^+ (E_{\perp k_2}^+ \cdot E_{\perp k_3}^-) + \int d_{123} \sum_{123}^l E_{zk_1}^+ E_{zk_2}^+ E_{zk_3}^- . \end{aligned} \quad (46)$$

El contenido físico de (4.46) está esencialmente caracterizado por los denominadores de los dos primeros términos de la parte derecha, que tienen en cuenta los campos virtuales de segundo orden. El último término, en \sum^l , describe la interacción modulante estudiada en la introducción de este Capítulo. El denominador del primer término tiene en cuenta la contribución de las ondas resonantes, y por consiguiente describirá el debilitamiento no-lineal Γ_l^{NL} de las ondas l debido al decaimiento $l \rightarrow a + a$ --- aparecerá una parte imaginaria en la frecuencia de las ondas de Langmuir que se sumará al amortiguamiento Landau, que es lineal ---. En el caso de paquetes de onda angostos $\Gamma_l^{NL} \sim |E_{\perp}|$, y en el caso de un fondo de ondas con fases aleatorias $\Gamma_l^{NL} \sim |E_{\perp}|^2 \sim W^2$ es proporcional a la energía en las ondas de Alfvén. Por otro lado, el segundo término del corchete que tiene en cuenta los batidos $\omega_0 + \omega_1$ y $\omega_0 + \omega_2$, ondas no-resonantes, describe la interacción modulacional debida a los campos virtuales de Alfvén, un efecto completamente nuevo. Los batidos de ondas de Alfvén hacen las veces de las fluctuaciones

de densidad de baja frecuencia en un plasma no-relativista. En el espacio de coordenadas este término dará lugar en la ecuación de movimiento para $E_z(z, t)$, a un término no-lineal de la forma $(E_{z0} E_1) \cdot E_1^*$, que es del mismo tipo que el que da el término en Σ^a , que es de tercer orden.

Antes de pasar (4.46) al espacio de coordenadas usando (4.36) es necesario aproximar las respuestas no-lineales

$$\Sigma_{ef}^a = \frac{S_{1+2,3} T_{1,2}}{(\omega^2 \epsilon_{1k} - c^2 k^2)_{1+2}} + \Sigma_{123}^a \simeq - \frac{\sqrt{2} \omega_p}{B_0^2}, \quad (47)$$

para lo cual supusimos que $\omega^a \simeq \omega^l/2$, con lo cual $(\omega^2 \epsilon_{1k} - c^2 k^2)_{1+2} \simeq 2\omega^l^2$ y

$$8\pi e^2 \int dp \frac{v \partial p f_0}{(\omega - kv)^2} \simeq -1, \quad (48)$$

como puede verse a partir de $\epsilon_{k_0}^l = 0$; y recordamos además que Σ^l está aproximada en (4.12). Dejando por el momento de lado

$$\text{Im } \epsilon_k^l \quad \text{y} \quad \text{Im } \frac{1}{\omega^2 \epsilon_{1k} - c^2 k^2}, \quad (49)$$

que están vinculados a Γ^L (amortiguamiento Landau) y Γ_l^{NL} (decaimiento de tres ondas), deducimos de (4.46) la ecuación de Schrödinger no-lineal que describe la evolución de $E_z(z, t)$ [429]

$$i(\partial_t + \frac{1}{2} \partial_z^2) E_z + \frac{1}{2} \partial_{zz} E_z + (|E_z|^2 + \Gamma^2 \phi) E_z = 0. \quad (50)$$

Además de E_z aparece el campo autoconsistente ϕ

$$\phi(z,t) = |\epsilon_z|^2 \quad (51)$$

vinculado a la fluctuación de densidad producida por la presión de las ondas de Alfvén, y que induce un corrimiento no-lineal de la frecuencia del plasma. En contraste con la fuerza ponderomotriz de las ondas longitudinales, la rarefacción de densidad producida por el campo de Alfvén es un efecto no-local. La ecuación que describe este efecto puede deducirse directamente de las ecuaciones (4.45), basta calcular $\square\phi$, donde $\square = \partial_t^2 - V_A^2 \partial_z^2$,

$$\square\phi = -\partial_t(\partial_t + V_A \partial_z)|\epsilon_z|^2 \quad (52)$$

Las ecuaciones (4.50, 52), que llamamos S3- ϕ , constituyen el sistema fundamental de ecuaciones sobre las cuales es posible estudiar la turbulencia fuerte en el plasma de la magnetosfera de los pulsars, en la aproximación de ondas que se propagan paralelas al campo magnético externo. El acoplamiento entre el campo de Langmuir E_z y el campo ϕ está caracterizado por la constante Γ^2 , que es normalmente pequeña en las condiciones de los pulsars. La fuente de campo ϕ , como puede verse en (4.52), es la corriente $(\partial_t + V_A \partial_z)|\epsilon_z|^2$ de plasmones longitudinales, interpretando a $|\epsilon_z|^2$ como la "carga" de los constituyentes del campo de Langmuir. Esta corriente produce una perturbación en la densidad que se propaga con la velocidad de Alfvén V_A , con lo cual la respuesta del plasma es no-local.

S3- ϕ tiene soluciones tipo solitón, al igual que S3

$$E_z = E_s(\zeta) e^{i\chi}, \quad \phi = \phi(\zeta), \quad (53)$$

donde $\zeta = z - Vt$, V es la velocidad del solitón, $\chi = Kz - \Omega t$ es la fase,

$$E_s = E_0 \operatorname{sech} k_0 \zeta, \quad \phi = g E_s^2 = g E_0^2 \operatorname{sech}^2 k_0 \zeta, \quad (54)$$

donde

$$g = \frac{V(V - V_l)}{V_a^2 - V^2}, \quad k_0 = (1 + \Gamma^2 g)^{1/2} E_0, \quad (55)$$

y la relación de dispersión no-lineal es

$$\Omega = \frac{1}{2} (V^2 - V_l^2) - \frac{1}{2} (1 + \Gamma^2 g) E_0^2, \quad K = V - V_l \quad (56)$$

de la misma manera que lo deducimos con el método KBM. Se puede observar que para velocidades $V \gtrsim V_a$, ($|g| \gg 1$, $g < 0$) si $|g| > \Gamma^{-2}$ el solitón no existe. Como veremos enseguida la presencia del campo auto-consistente ϕ permite que se produzcan colisiones inelásticas entre solitones. Esto cambia drásticamente las propiedades del sistema respecto del sistema S3 para el cual las colisiones entre solitones es elástica, y en principio una perturbación cualquiera no conduce a la formación de un arreglo unidimensional de solitones, sino que el sistema oscila alrededor del estado de solitón [77].

En resumen el método KT nos permitió deducir las ecuaciones S3- ϕ que antes habíamos encontrado usando el método KBM. Además con el método KT podemos calcular directamente el coeficiente de debilitamiento no-lineal, considerando ahora el primer término de la derecha de (4.46). La parte imaginaria de ese término la

podemos calcular usando

$$\text{Im} \frac{1}{\omega^2 \epsilon_{\perp k} - c^2 k^2} = -\pi \delta(\omega^2 \epsilon_{\perp k} - c^2 k^2) = -\frac{\pi \delta(\omega - \omega(k))}{|(\partial_{\omega} \omega^2 \epsilon_{\perp k})_{\omega=\omega(k)}|}, \quad (57)$$

donde $\omega(k) = \omega^a$ satisface la relación de dispersión. En efecto, tomemos solo el término resonante de (4.46)

$$\omega \epsilon_k^l E_{zk}^+ = \int d_{123} \frac{S_{1+3,2} T_{1,3}}{(\omega^2 \epsilon_{\perp k} - c^2 k^2)_{1+3}} E_{zk_1}^+ (\underline{E}_{\perp k_2}^+ \cdot \underline{E}_{\perp k_3}^-), \quad (58)$$

y multipliquemos por E_{zk}^{+*} usando además

$$\langle E_{zk} E_{zk'} \rangle = |E_{zk}|^2 \delta(k+k'), \quad (59)$$

con lo cual obtenemos

$$\omega \epsilon_k^l |E_{zk}^+|^2 = \int d_{123} \frac{S_{1+3,2} T_{1,3}}{(\omega^2 \epsilon_{\perp k} - c^2 k^2)_{1+3}} (\underline{E}_{\perp k_2}^+ \cdot \underline{E}_{\perp k_3}^-) |E_{zk_1}^+|^2 \delta(k_1 - k), \quad (60)$$

o igualmente

$$(\epsilon_k^l + \epsilon_k^{NL}) |E_{zk}^+|^2 = 0 \quad (61)$$

donde

$$\epsilon_k^{NL} = \frac{1}{\omega} \int dk' \frac{S_{k,k-k',k'} T_{k,k,-k'}}{(\omega^2 \epsilon_{\perp k} - c^2 k^2)_{k-k'}} |E_{\perp k'}^+|^2 \quad (62)$$

para lo cual usamos que

$$E_{zk}^{+*} = E_{z-k}^- \quad (63)$$

Teniendo la permitividad no-lineal ϵ_k^{NL} , el coeficiente de debilitamiento lo calculamos a partir de la definición

$$\Gamma_l^{NL} = -\frac{\text{Im} \epsilon_k^{NL}}{\partial_{\omega} \epsilon_k^l}, \quad (64)$$

usando (4.57)-(4.62). Una peculiaridad de (4.62) es que no aparece una integral sobre los impulsos de las partículas. En definitiva obtenemos

$$\begin{aligned} \Gamma_l^{NL} \approx & - \frac{\sqrt{\beta} \omega_p}{2} \frac{1}{\sqrt{\beta} \omega_p} \frac{c}{2 B_0} \sqrt{\beta} \omega_p \left(-\frac{2}{c}\right) \frac{c}{B_0} \sqrt{\beta} \omega_p \omega_a \left(\frac{1}{c}\right) \times \\ & \times \left(\frac{-\pi}{2\omega_a}\right) \int dk' d\omega' \delta(\omega - \omega' - \omega^*) |\mathbf{E}_{l k'}^+|^2, \end{aligned} \quad (65)$$

Notando que $\delta(\omega - \omega' - \omega^*) = \int \frac{dt}{2\pi} e^{i(\omega - \omega')t - i\omega^* t}$,

la integral de (4.65) la podemos estimar simplemente como W^a/ω^a con lo cual

$$\Gamma_l^{NL} \approx - \sqrt{\beta} \omega_p \frac{W^a}{B_0^2} \quad (66)$$

Considerando Γ_l^{NL} y Γ^L , escribimos (4.50) como

$$i(\partial_t + \frac{1}{2}\partial_z - \Gamma^L - \Gamma_l^{NL})E_z + \frac{1}{2}\partial_{zz}E_z + (|\mathbf{E}_z|^2 + \Gamma^2\Phi)E_z = 0 \quad (67)$$

Como en general $W^a \ll W^l$, Γ_l^{NL} resulta pequeño respecto de la tasa de crecimiento de las ondas de Alfvén Γ_D , ya que

$$\Gamma_l^{NL} = - \frac{W^a}{W^l} \Gamma_D, \quad |\Gamma_l^{NL}| \ll \Gamma_D \quad (68)$$

por otra parte Γ_l^{NL} es mucho menor que el crecimiento de las ondas

de Langmuir debido a la inestabilidad de haces

$$|\Gamma^{NL}| \ll \Gamma_b \quad (69)$$

Sin embargo, en el caso en que $\Gamma_b \geq \Gamma_0$, lejos de la superficie del pulsar la energía de Alfvén W^a alcanzaría el nivel de W^l , con lo cual sería posible el establecimiento de un régimen estacionario en el cual intervengan solo los procesos de excitación de ondas l, a expensas de la energía del haz, y su decaimiento en ondas a. Este esquema no es válido en regiones relativamente cercanas a la superficie del pulsar donde $\Gamma^l \ll 1$ (del orden de $10^{-2} \cdot 10^{-4}$) por lo cual el régimen estacionario puede establecerse como consecuencia del desarrollo de la turbulencia fuerte, donde adquieren particular importancia las interacciones modulacionales.

4.3 FORMALISMO LAGRANGIANO

Una vez planteadas las ecuaciones que describen la evolución dinámica de un plasma turbulento, en este caso de la magnetosfera de los pulsares, en las cuales están incluidos los principales efectos no-lineales como las interacciones de tres ondas y las interacciones modulantes, es necesario establecer y describir los procesos básicos de interacción en el estado de turbulencia fuerte. Hemos visto que las ecuaciones S3- ϕ poseen soluciones de tipo soliton, pero no conocemos como se comportan estos solitones o qué tipo de interacciones pueden sufrir. Unas de las vías que permiten avanzar en el análisis de estas interacciones es el formalismo lagrangiano. Si es posible encontrar una densidad lagrangiana de la cual se derivan S3- ϕ , podremos encontrar algunas integrales de movimiento mediante las cuales analizar las colisiones entre solitones y la evolución de perturbaciones en el plasma.

En primer lugar veamos sobre qué campos debemos definir la densidad lagrangiana. Es inmediato que no existe Λ tal que

$$\Lambda = \Lambda(E, E^*, \phi)$$

conduzca a las ecuaciones de campo dado que

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial E^* \partial \phi} \neq \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \phi \partial E^*}$$

por lo cual es necesario encontrar un potencial real χ para el cual $\Lambda = \Lambda(E, E^*, \chi)$ las ecuaciones de campo sean

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial E^*} - \partial_t \frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_t E^*} - \partial_z \frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_z E^*} = 0, \quad (70)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \chi} - \partial_t \frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_t \chi} - \partial_z \frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_z \chi} = 0, \quad (71)$$

y del cual supondremos que satisface una ecuación de onda con una fuente no-lineal F

$$\square \chi = F(\phi, |E|^2), \quad (72)$$

F depende del campo ϕ y del módulo de E , ya que χ es real. Por comodidad reiteramos las ecuaciones de campo aquí

$$i(\partial_t + V_L \partial_z)E + \frac{1}{2} \partial_{zz} E + (|E|^2 + \Gamma^2 \phi)E = 0,$$

$$(\partial_{tt} - V_a^2 \partial_{zz})\phi = -\partial_t (\partial_t + V_L \partial_z) |E|^2.$$

Los operadores diferenciales (lineales) de estas ecuaciones conducen a los siguientes términos en la densidad lagrangiana, usando (4.72)

$$i(\partial_t + V_L \partial_z)E \rightarrow \frac{1}{2} i[E^*(\partial_t + V_L \partial_z)E - E(\partial_t + V_L \partial_z)E^*],$$

$$\partial_{zz} E \rightarrow -\frac{1}{2} |\partial_z E|^2, \quad (73)$$

$$\square \chi \rightarrow (\partial_t \chi)^2 - V_a^2 (\partial_z \chi)^2,$$

por otra parte el término no-lineal cúbico en E se deriva de un término en Λ del tipo

$$|E|^2 E \rightarrow |E^2|^2. \quad (74)$$

Dado que deseamos que χ sea un potencial apropiado para derivar la correcta ecuación de campo, supondremos que F de (4.72) es un operador diferencial lineal con derivadas de primer orden, a diferencia de la ecuación para ϕ en la cual la fuente tiene derivadas segundas. Definimos por lo tanto un operador \hat{d}

$$\hat{d} = a \partial_t + \mu \partial_z, \quad (75)$$

con a y μ constantes a determinar, tal que

$$\hat{d}\chi = \phi + b |\mathbf{E}|^2, \quad (76)$$

donde b es también una constante. Con esta definición del potencial podemos escribir la densidad lagrangiana $\Lambda(E, E^*, \chi)$ y usando (4.70) y (4.71) determinar las constantes a , μ y b ,

$$\begin{aligned} \Lambda = & \frac{i}{2} [E^* (\partial_t + V_L \partial_z) E - E (\partial_t + V_L \partial_z E^*)] - \frac{1}{2} |\partial_z E|^2 + \frac{1}{2} (1 - b \Gamma^2) |E|^2 + \\ & + \Gamma^2 |\mathbf{E}|^2 \hat{d}\chi + \frac{\Gamma^2}{2} [(\partial_t \chi)^2 - V_A^2 (\partial_z \chi)^2]. \end{aligned} \quad (77)$$

Usando (4.77) vemos que (4.70) conduce a la ecuación de campo para E

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial E^*} = & \frac{i}{2} (\partial_t + V_L \partial_z) E + (1 - b \Gamma^2) |\mathbf{E}|^2 E + \Gamma^2 E \hat{d}\chi, \\ - \partial_t \frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_t E^*} - \partial_z \frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_z E^*} = & \frac{i}{2} (\partial_t + V_L \partial_z) E + \frac{1}{2} \partial_{zz} E, \end{aligned}$$

mientras que (4.79) conduce a

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \chi} = 0, \quad \partial_t \frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_t \chi} + \partial_z \frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_z \chi} = \Gamma^2 \hat{d} |\mathbf{E}|^2 + \Gamma^2 \square \chi = 0,$$

es decir

$$\square \chi = - \hat{d} |\mathbf{E}|^2, \quad (78)$$

ahora multiplicando (4.78) por el operador \hat{d} y sustituyendo (4.76), vemos que se debe satisfacer la siguiente relación para que (4.78) implique la ecuación de campo para ϕ

$$b\Box + \hat{d}^2 = \partial_{tt} + V_L \partial_{tz}, \quad (79)$$

con lo cual resultan

$$a = (1-b)^{1/2}, \quad u = V_a \sqrt{b}, \quad b = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \left(1 - \frac{V_L^2}{V_a^2}\right)^{1/2}, \quad (0 \leq b < 1). \quad (80)$$

En el caso en que $V_L \ll V_a$, como es normalmente, el coeficiente b tiende a cero

$$V_L \ll V_a \Rightarrow a \approx 1, \quad u \approx 0, \quad b \approx 0, \quad (81)$$

y la densidad lagrangiana es

$$\begin{aligned} \Lambda = & \frac{i}{2} (E^* \partial_t E - E \partial_t E^*) - \frac{1}{2} |\partial_z E|^2 + \frac{1}{2} |E|^2 + \\ & + \frac{\pi^2}{2} |E|^2 \partial_t \chi + \frac{\pi^2}{2} [(\partial_t \chi)^2 - V_a^2 (\partial_z \chi)^2], \end{aligned} \quad (82)$$

$$\partial_t \chi = \phi. \quad (83)$$

Teniendo la densidad lagrangiana podemos calcular las integrales de movimiento vinculadas a las invarianzas [18][38]

$$E \rightarrow E e^{i\varphi}, \quad (84)$$

$$E \rightarrow E(z, t + \delta t), \quad E \rightarrow E(z + \delta z, t), \quad (85)$$

de las ecuaciones de campo. En primer lugar vemos que el número de plasmones es invariante (conservación de la carga vinculada a la simetría (4.84) de gauge)

$$N = i \int dz \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_t E^*} E^* - \frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_t E} E \right). \quad (86)$$

Para futura referencia escribimos aquí algunas derivadas útiles de la lagrangiana Λ :

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_t E} = \frac{i}{2} E^*, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_t E^*} = -\frac{i}{2} E; \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_z E} = \frac{i}{2} V_L E^* - \frac{1}{2} \partial_z E^* = \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_z E^*} \right)^*, \quad (87)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_t \chi} = \Gamma^2 (1-b)^{1/2} |E|^2 + \Gamma^2 \partial_t \chi, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_z \chi} = \Gamma^2 V_L V_A |E|^2 - \Gamma^2 V_A^2 \partial_z \chi.$$

Usando (4.87), el número de plasmones resulta

$$N = \int dz |E|^2 \quad (88)$$

Si definimos la densidad de corriente, es decir el flujo de plasmones, como

$$J = i \frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_z E^*} E^* - i \frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_z E} E,$$

podemos escribir una ecuación de continuidad asociada al flujo de plasmones

$$\partial_t |E|^2 + \partial_z \left[V_L |E|^2 + \frac{i}{2} (E \partial_z E^* - E^* \partial_z E) \right] = 0$$

o análogamente

$$i (\partial_t + V_L \partial_z) |E|^2 + \frac{1}{2} \partial_z (E^* \partial_z E - E \partial_z E^*) = 0 \quad (89)$$

La integral de movimiento asociada a la invarianza frente a traslaciones es el impulso

$$P = - \int dz \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_t E} \partial_z E + \frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_t E^*} \partial_z E^* + \frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_t \chi} \partial_z \chi \right] \quad (90)$$

el cual se escribe, por medio de (4.87) como

$$P = \int dz \left[\frac{i}{2} (E \partial_z E^* - E^* \partial_z E) - \Gamma^2 (\partial_t \chi + \sqrt{1-b} |E|) \partial_z \chi \right] \quad (91)$$

De la misma manera calculamos la energía, integral de movimiento asociada a la homogeneidad del tiempo

$$H = \int dz \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_t E} \partial_t E + \frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_t E^*} \partial_t E^* + \frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_t \chi} \partial_t \chi - \Lambda \right] \quad (92)$$

y que mediante (4.87) resulta

$$H = \frac{1}{2} \int dz \left[i V_l (E \partial_z E^* - E^* \partial_z E) + |\partial_z E|^2 - (1-b\Gamma^2) |E|^2 - |E|^2 \Gamma^2 V_a \sqrt{b} \partial_z \chi + \Gamma^2 (\partial_t \chi^2 + V_a^2 \partial_z \chi^2) \right] \quad (93)$$

Es inmediato verificar que para $\Gamma^2 \rightarrow 0$, H y P tienden a las integrales de la ecuación 93. Ahora vamos a calcular N , P y H para la solución de tipo solitón, teniendo en cuenta que en este caso $\chi = \chi(\xi)$ y de (4.76) obtenemos que

$$\begin{aligned} \partial_\xi \chi &= -V \partial_t \chi = \partial_z \chi = -g' E_0^2 \operatorname{sech}^2 k_0 \xi, \\ g' &= -(g+b)(\sqrt{b} V_a - \sqrt{1-b} V)^{-1}, \end{aligned} \quad (94)$$

donde hemos usado (4.54). Si $V_l \ll V_a$

$$\partial_\xi \chi = -\frac{g}{V} E_0^2 \operatorname{sech}^2 k_0 \xi, \quad g' \approx \frac{g}{V}. \quad (95)$$

Reemplazando (4.54) y (4.95) en las integrales de movimiento

obtenemos para los solitones las siguientes expresiones

$$N_s = \frac{2E_0}{(1+\Gamma^2 g)^{1/2}} \quad (96)$$

$$P_s = \frac{2(V-V_L)E_0}{(1+\Gamma^2 g)^{1/2}} + \frac{4}{3} \Gamma^2 g' \frac{\sqrt{1-b} - g'V}{(1+\Gamma^2 g)^{1/2}} E_0^3 \quad (97)$$

$$H_s = \frac{V^2 - V_L^2}{(1+\Gamma^2 g)^{1/2}} E_0 - \frac{1 - \Gamma^2(g-2b) - 4\Gamma^2 g' [V_a \sqrt{b} + \frac{g'}{2}(V^2 + V_a^2)]}{3(1+\Gamma^2 g)^{1/2}} E_0^3 \quad (98)$$

que para $V_L \ll V$ se reducen a

$$N_s = m, \quad m = 2E_0 \left[\frac{V_a^2 - (1-\Gamma^2)V^2}{V_a^2 - V^2} \right]^{-1/2}, \quad (99)$$

$$P_s = mV + \frac{\Gamma^2}{6} m^3 \frac{V_a^2 - (1-\Gamma^2)V^2}{(V_a^2 - V^2)^3} V_a^2 V, \quad (100)$$

$$H_s = \frac{mV^2}{2} - \frac{m^3}{24} \left[1 - \frac{\Gamma^2 V^2}{(V_a^2 - V^2)^3} (2V_a^4 - 2(1 - \frac{1}{2}\Gamma^2)V^4 + 3\Gamma^2 V_a^2 V^2) \right], \quad (101)$$

una expresión equivalente para H_s es

$$H_s = \frac{mV^2}{2} - \frac{m^3}{24} \frac{V_a^2 - (1-\Gamma^2)V^2}{(V_a^2 - V^2)^3} [V_a^4 - 2(1 + \frac{3}{2}\Gamma^2)V_a^2 V^2 + (1-\Gamma^2)V^4] \quad (102)$$

Siguiendo el trabajo de Gibbons et al. [38] podemos ahora suponer que el plasma esta formado por un conjunto de solitones que interactúan entre sí y en el cual ademas hay paquetes de ondas de Alfvén. Sabemos que en ausencia de campo de Langmuir el

campo ϕ satisface una ecuación de onda homogénea y por lo tanto sus soluciones serán ondas viajeras cuyo argumento es de la forma $z \mp v_a t$, esto nos permite definir

$$M_{\pm} = r^2 \int dz (\partial_z \chi)_{\pm}^2 \quad (103)$$

el signo + corresponde a ondas que viajan hacia la derecha, mientras que el signo - indica ondas que se mueven hacia la izquierda. Evidentemente M_{\pm} son cantidades positivas. La contribución de las ondas a las integrales de movimiento es la siguiente

$$\begin{aligned} N_A &= 0 \\ P_A &= M_+ v_a - M_- v_a \end{aligned} \quad (104)$$

$$H_A = (M_+ + M_-) v_a^2$$

Para un estado en el cual hay en el plasma un cierto número de solitones y ondas de Alfvén, las integrales de movimiento son

$$\begin{aligned} N &= \sum_s m_s \\ P &= \sum_s P_s + (M_+ - M_-) v_a \\ H &= \sum_s H_s + (M_+ + M_-) v_a^2 \end{aligned} \quad (105)$$

En base a las integrales de movimiento se puede analizar qué tipo de interacciones pueden sufrir los solitones. En primer lugar hacemos un gráfico del impulso P_s en función de la energía H_s usando las ecuaciones paramétricas, con parámetro V , (4.100) y (4.101). Vemos en la Fig. 4.1 que las curvas para distintas masas son aproximadamente parábolas (para V pequeña) separadas

por una cantidad del orden de m^3 . Estas curvas no se intersectan y las que tienen "masa" m más pequeña están siempre por encima de las de "masa" más grande. Las ondas de Alfvén están representadas por dos rectas a 45° grados del eje de ordenadas ($H_A = V_A P_A$).

Dada la conservación de N , procesos del tipo

$$\begin{aligned} L &\rightarrow a \\ L &\rightarrow L + a \end{aligned} \quad (106)$$

donde L representa un solitón de Langmuir, son imposibles. La emisión de ondas de Alfvén remueve al solitón de su curva $m=\text{const.}$ En cambio puede haber dispersión de ondas a por solitones

$$L + a \rightarrow L + a \quad (107)$$

El proceso más interesante es el de fusión de solitones (ver Fig. 4.1)

$$L_1 + L_2 \rightarrow L + a^- \quad (108)$$

que tiene que estar acompañado de la emisión de ondas a . Si bien este proceso está permitido pues no viola las leyes de conservación, el que pueda realizarse depende de la eficiencia con la que se generan ondas de Alfvén durante la colisión de los solitones. Para estimar la energía de las ondas de Alfvén generadas \tilde{H}_A durante la interacción de dos solitones nos basaremos en las ecuaciones de continuidad para el número de

plasmones (4.89) y para la energía. El flujo de energía definido por

$$\mathcal{F} = \frac{\partial \lambda}{\partial \partial_z E} \partial_t E + \frac{\partial \lambda}{\partial \partial_z E^*} \partial_t E^* + \frac{\partial \lambda}{\partial \partial_z \chi} \partial_t \chi, \quad (109)$$

es, para $V_l \ll V_a$ y de acuerdo a (4.87)

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2} (\partial_z E^* \partial_t E + \partial_z E \partial_t E^*) - \Gamma^2 V_a^2 \partial_z \chi \partial_t \chi. \quad (110)$$

La ecuación de conservación de la energía es

$$\partial_t \mathcal{H} + \partial_z \mathcal{F} = 0, \quad (111)$$

donde \mathcal{H} es la densidad de energía dada por el integrando de (4.93). Ahora aplicamos (4.111) al proceso de generación de ondas de Alfvén, crecimiento de la densidad de energía de Alfvén descrito por el primer termino de (4.111), como resultado de la interacción de los solitones, es decir que supondremos que las ondas α se generan a expensas del flujo de energía de los solitones, segundo termino de (4.111). Por lo tanto, eliminando los términos en el campo longitudinal del mismo orden, y usando (4.83), deducimos

$$2 \partial_t \phi^2 \Big|_{\text{Alfvén}} \simeq -V_a^2 \partial_z (\partial_z \chi \phi) \Big|_{\text{Solitón}}. \quad (112)$$

El cálculo del miembro izquierdo de esta ecuación es inmediato, en efecto, dado que

$$\square \chi = -\partial_t |\mathbf{E}|^2,$$

tenemos

$$V_a^2 \partial_z (\partial_z \chi) = -\partial_t (|\mathbf{E}|^2 + \phi) \approx - (1+g) \partial_t |\mathbf{E}|^2,$$

donde usamos $\phi \sim g |\mathbf{E}|^2$, correcto para solitones, y usando además (4.89) en la forma

$$\partial_t |\mathbf{E}|^2 = V \partial_z |\mathbf{E}|^2, \quad (113)$$

($\mathbf{E} \sim E_0 e^{i\psi}$, $K = V$) obtenemos

$$V_a^2 \partial_z \chi = - (1+g) V |\mathbf{E}|^2. \quad (114)$$

Reemplazando (4.114) en (4.112) resulta

$$\partial_t \phi^2 = \frac{1}{2} (1+g) g V \partial_z |\mathbf{E}|^4 \quad (115)$$

lo cual nos permite calcular \tilde{H}_A

$$\tilde{H}_A = \Gamma^2 \int dz \phi^2 \approx \frac{\Gamma^2}{2} (1+g) g V |\mathbf{E}|^4 \tilde{\tau} \quad (116)$$

donde el tiempo de interacción es aproximadamente el tiempo durante el cual los dos solitones se atravesarían sin interactuar

$$\tilde{\tau} = \tau_{int} = (1 - \Delta V^2/c^2)^{-1/2} k_0^{-1} / \Delta V, \quad (117)$$

donde ΔV es la velocidad relativa de los dos solitones, k_0 está dado por (4.55) y hemos tenido en cuenta la corrección relativista. Por lo tanto, la energía generada es

$$\tilde{H}_A = \frac{\Gamma^2 V (1+g) g}{16 \Delta V (1 - \Delta V^2/c^2)^{1/2}} (1 + \Gamma^2 g) m^3 \quad (118)$$

Si $V \ll V_a$, \tilde{H}_A es aproximadamente

$$\tilde{H}_A \approx \frac{\Gamma^2 V}{16 \Delta V} \frac{V^2}{V_a^2} m^3, \quad V \ll V_a, \quad (119)$$

mientras que si V esta alrededor de V_a , digamos $V_a^2 - V^2 \approx \Gamma^2 V^2$, resulta

$$\tilde{H}_A \approx \frac{m^3}{8 \Gamma^3}, \quad V_a^2 - V^2 \approx \Gamma^2 V^2, \quad (120)$$

donde usamos $V_a^2 \approx c^2(1 - \Gamma^2)$ de la relación de dispersión de las ondas a , y $\Delta V \approx V$ como ocurre en el caso relativista.

Ahora analizaremos la colisión de dos solitones idénticos, con "masas" $m = m_1 = m_2$ y velocidades opuestas $V = V_1 = -V_2$. En primer lugar supondremos $V \ll V_a$, es decir $g = V^2 / V_a^2 \ll 1$, y nos limitaremos al caso $m \gg 1$, dado que como $\tilde{H}_A \sim m^3$ si $m \ll 1$ no es posible la fusión. La conservación del número de plasmones implica que el solitón fusionado debe tener masa $2m$, el doble de la amplitud de los solitones incidentes. Por otra parte las ondas de Alfvén se emiten en sentidos opuestos, como resulta de la conservación del impulso

$$0 = (M_+ - M_-) V_a, \quad P_s(-V) = -P_s(V),$$

La ecuación de conservación de la energía conduce a ($m \gg 1$)

$$-\frac{m^3}{12} = -\frac{m^3}{3} + H_A, \quad H_A \sim m^3, \quad (121)$$

Comparando (4.121) con (4.119) vemos que resulta imposible la fusión de solitones lentos. En este caso es de esperar que el choque sea "elástico", es decir que los solitones no se deforman. Para que dos solitones lentos puedan fusionarse, ΔV debe ser muy

pequeño, del orden de $\Delta V = \Gamma^2 V$, con lo cual el tiempo de encuentro τ_c se hace muy largo

$$\tau_c \sim \frac{\lambda_M}{\Delta V} \quad (122)$$

donde λ_M es cierta longitud característica. Las consecuencias de esto en relación a la física de los pulsars las analizaremos luego.

La situación es muy distinta para velocidades cercanas a la velocidad de Alfvén. Suponiendo como en (4.20) $g \sim \Gamma^{-2}$, el impulso y la energía de los solitones son aproximadamente

$$P_s = mV + \frac{m^3}{3\Gamma^2} V^{-1} \quad (123)$$

$$H_s = \frac{mV^2}{2} + \frac{m^3}{3\Gamma^2}$$

mientras que \tilde{H}_A es del orden dado en (4.120). En el caso de la colisión de dos solitones idénticos ($m \gg 1$)

$$H_A \sim \frac{m^3}{\Gamma^2} \ll \tilde{H}_A \quad (124)$$

Por consiguiente los solitones con velocidades próximas a la velocidad de Alfvén pueden sufrir interacciones de fusión, cuyo resultado es el crecimiento de la amplitud del solitón y la fuerte generación de ondas de Alfvén. La energía de las ondas generadas durante la fusión es comparable a la energía del solitón. Este resultado es consistente con el hecho de que cuando $V = V_a$, en la ecuación S3- ϕ el término en el campo autoconsistente ϕ es del mismo orden que el término de

modulación $|E|^2$.

V. TEORIA DE LA TURBULENCIA Y LOS MECANISMOS DE RADIOEMISION COHERENTE

5.1 EL ESPECTRO DE LA TURBULENCIA

Como se ha mostrado, alrededor de $k=k_*=\omega_p/\sqrt{3}c$ son excitadas ondas de Langmuir 1 por interacción Cherenkov de haces de partículas ultrarrelativistas con el plasma magnetosférico de electrones y positrones. La evolución cuasilineal de estas ondas, conduce a un estado modulacionalmente inestable cerca de $k=0$, donde una fracción βW_0^l de la energía inicial de las ondas W_0^l se fue acumulando. La evolución subsiguiente del sistema, el cual entra en una etapa de turbulencia fuerte en la cual cambian profundamente sus propiedades dispersivas, depende de la naturaleza de las interacciones entre los movimientos no-lineales, como los solitones. El estado que resulta del desarrollo de la inestabilidad modulacional esta básicamente descrito por las ecuaciones S3- ϕ .

Cualitativamente, como en la turbulencia de flúidos, es posible distinguir tres regiones en el espectro de la turbulencia fuerte de plasmas. La región fuente de turbulencia de gran escala, la región de disipación de turbulencia de pequeña escala, y la región inercial entre ellas, donde la energía fluye de la fuente hacia la región de disipación estacionariamente. En el caso de la turbulencia de Langmuir, la dirección del flujo (en el

espacio de los números de onda), es opuesta a la dirección característica del régimen cuasilineal de la turbulencia, es decir que se produce un flujo hacia números de onda grandes.

La energía almacenada en los solitones es transferida a la región de disipación por medio de varios mecanismos [29] como las interacciones entre solitones que tienden a hacer crecer su amplitud, como los procesos de fusión estudiados mediante el formalismo lagrangiano, y el colapso de solitones [36] inducido por el bombeo continuo de ondas de Langmuir al plasma, resultante de la inestabilidad de haces. La dinámica del colapso depende fuertemente del campo autoconsistente y del debilitamiento Γ_L^M , como veremos enseguida.

Debemos recalcar que en el sistema cuasi-unidimensional de la magnetosfera de los pulsars los solitones son estructuras estables. Sin embargo si el plasma es alimentado por una fuente externa que excita ondas de Langmuir -- como los haces de partículas -- y por consiguiente el número de plasmones no se conserva constante, son posibles otra clase de soluciones de las ecuaciones S3- ϕ . De estas soluciones son importantes aquellas que describen el colapso de los solitones ya que este proceso transfiere la energía de la turbulencia hacia la región de disipación, estableciéndose un régimen turbulento fuerte.

Debemos entonces introducir un término de fuente de plasmones S, en las ecuaciones básicas

$$i\partial_t E + \frac{1}{2}\partial_{zz} E + (|E|^2 + r^2\phi)E = iSE, \quad S = S(t), \quad (1)$$

con lo cual

$$\partial_t N = 2S(t)N, \quad (2)$$

($V_L \ll V_a$) donde hemos supuesto que S es real. Las dimensiones de S son la inversa de un tiempo, $[S] = T^{-1}$. Buscaremos una solución de $S\partial_t E$ en la aproximación adiabática

$$E = \psi(z, t) e^{i\varphi(t)t}, \quad (3)$$

en la cual despreciamos $\partial_t \psi$ frente a $\varphi(t)$, es decir

$$i\partial_t E \rightarrow -\varphi(t)E, \quad (4)$$

mientras que la fase $\varphi(t)$ la consideramos real, $\psi(z, t)$ es en general una amplitud compleja, la cual contiene la no-conservación de la "norma" N . Sustituyendo (5.3) en (5.1) obtenemos

$$\frac{1}{2}\partial_{zz} \psi + (|\psi|^2 + r^2\phi)\psi = \varphi(t)\psi \quad (5)$$

donde hemos despreciado además iS frente a $\varphi(t)$, dado que por (5.2) iS es del orden de $\partial_t \psi$. Por otra parte la ecuación para el campo autoconsistente es

$$\square\phi = -\partial_{tt}|\psi|^2 \quad (6)$$

Propondremos una solución auto-similar de (5.5)-(5.6) compatible con (5.2), para la cual los campos ψ y ϕ dependerán de z y t a

través de una variable

$$\xi = Z/\tau^\nu, \quad \tau = t_0 - t, \quad (7)$$

donde ν y t_0 son constantes. De esta manera pretendemos transformar al sistema (5.5)-(5.6) en un sistema de ecuaciones en derivadas ordinarias, dado que

$$\partial_t = \frac{\nu \xi}{\tau} d_\xi, \quad \partial_z = \frac{1}{\tau^\nu} d_\xi. \quad (8)$$

La solución autosimilar es de la forma

$$\psi = \frac{1}{\tau^\lambda} \varepsilon(\xi), \quad \phi = \frac{1}{\tau^\mu} f(\xi), \quad \varphi(t) = \frac{\alpha}{\tau^\rho}, \quad (9)$$

donde deberemos determinar las potencias ν , λ , μ y ρ ; α es una constante. Reemplazando (5.9) en (5.5)-(5.6) encontramos

$$\frac{1}{2} \frac{d_{\xi\xi} \varepsilon}{\tau^{\lambda+2\nu}} + \frac{\varepsilon^3}{\tau^{3\lambda}} + \frac{\Gamma^2 f \varepsilon}{\tau^{\mu+\lambda}} = \frac{\alpha \varepsilon}{\tau^{\rho+\lambda}}, \quad (10)$$

$$\frac{1}{\tau^{\mu-2\lambda}} \left(\frac{V_a^2}{\nu^2 \tau^{2\nu-2}} - \xi^2 \right) d_{\xi\xi} f = \xi^2 d_{\xi\xi} \varepsilon^2. \quad (11)$$

Sin pérdida de generalidad hemos puesto ε real, de (5.10)-(5.11) deducimos que

$$\nu = 1, \quad \mu = 2\lambda, \quad \lambda + 2\nu = 3\lambda = \rho + \lambda, \quad (12)$$

es decir

$$\nu = 1, \quad \lambda = 1, \quad \mu = 2, \quad \rho = 2,$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{2} d_{\xi\xi} \varepsilon + \varepsilon^3 + \Gamma^2 f \varepsilon = \alpha \varepsilon, \quad (13)$$

$$(V_a^2 - \xi^2) d_{\xi\xi} f = \xi^2 d_{\xi\xi} \varepsilon^2. \quad (14)$$

La solución de (5.9)-(5.12) no conserva, por supuesto, el número

de plasmones. Veamos que forma tiene que tener $S(t)$ para ser compatible con (5.13)-(5.14). Para ello reemplazamos (5.9) en (5.2)

$$\partial_t \int dz \frac{\epsilon^2(\xi)}{\tau^2} = \partial_t \frac{1}{\tau^2} \int d\xi \tau \epsilon^2(\xi) = S(t) \int d\xi \frac{\epsilon^2(\xi)}{\tau^2}$$

y por consiguiente

$$S(t) = 1/\tau \quad (15)$$

En efecto, para ilustrar estos resultados busquemos una solución de (5.13) en el caso $\Gamma \rightarrow 0$. Encontramos que

$$\epsilon = \epsilon_0 \operatorname{sech}\left(\frac{\epsilon_0 z}{\tau}\right), \quad \psi = \frac{\epsilon_0}{\tau} \operatorname{sech}\left(\frac{\epsilon_0 z}{\tau}\right), \quad (16)$$

además

$$N = \int dz \psi^2 = \frac{2\epsilon_0}{\tau}, \quad \partial_t N = \frac{2\epsilon_0}{\tau^2} = S(t) N$$

que remite a (5.15). Cualitativamente por (5.16) y por la forma de la solución auto-similar (5.9) podemos decir que para $\tau \rightarrow 0$ la amplitud de los solitones aumenta (tiende a infinito como $1/\tau$) mientras que su ancho tiende a cero (el ancho es del orden τ/ϵ_0). Es muy importante notar que la dependencia de la variable auto-similar $\xi = z/\tau$ queda determinada por la forma de la ecuación para el campo autoconsistente, dado que esta implica $V=1$. Resulta además que $\phi \sim |\epsilon|^2$. Por otra parte (5.15) puede interpretarse suponiendo que S está relacionado con la tasa de crecimiento de la inestabilidad de haces, que en el régimen hidrodinámico es proporcional al campo electrostático de las ondas de Langmuir y por lo tanto (5.15) da la correcta dependencia temporal, de acuerdo con (5.9). En efecto, de (5.1) vemos que S representa una pequeña parte imaginaria de la

frecuencia: $i\partial_t \rightarrow i\partial_t + iS \rightarrow \omega + iS$.

Esta descripción del colapso de los solitones puede verse modificada por la presencia del debilitamiento Γ_l^{NL} , debido al decrecimiento del número de plasmones $1 \rightarrow a+a$. Dado que la generación de ondas de Alfvén es efectiva para perturbaciones "alfvénicas" $v \approx v_a$, es posible que en la etapa $\xi \approx v_a$ el colapso se detenga debido a la emisión de ondas de Alfvén, dado que en general

$$\partial_t N = 2(S + \Gamma_l^{NL})N \quad (17)$$

conduce a un estado estacionario para $\Gamma_l^{NL} \sim -S$.

La cuestión que ahora surge es la de encontrar qué tipo de espectro puede formarse en la región inercial del espectro turbulento como consecuencia del colapso de los solitones, asumiendo que este proceso es una contracción auto-similar con $\xi = z/\tau$. Si el flujo de energía turbulenta W_k a través del espacio de números de onda es estacionario tenemos

$$\partial_t W_k = \partial_k \frac{\Delta k}{\tau_k} W_k = 0, \quad (18)$$

donde τ_k es el tiempo de vida característico del modo k , y $\Delta k \sim k$ es el cambio promedio del número de onda, y que en ordenes de magnitud, dada la ley de auto-similaridad, podemos estimar como $\tau_k \sim k^{-1} \sim \xi_0$ con ξ_0 una dimensión característica. Por lo tanto (5.18) implica

$$W_k \approx \frac{\tau_k}{\Delta k} \sim k^{-2}, \quad (19)$$

es decir que el colapso de los solitones contribuye a la formación en el rango inercial, de un espectro de potencias, con índice espectral -2.

Ahora vamos a analizar la turbulencia de Langmuir suponiendo que se trata de turbulencia de solitones, es decir de un sistema ergódico de solitones. Esta ergodicidad se establece por las interacciones entre solitones, como los procesos de fusión, o a través del colapso. Dado el alto grado de estabilidad de los solitones en las condiciones de la magnetosfera, la representación de la turbulencia como un arreglo ergódico de solitones, parece ser justificada. Por supuesto solo mediante simulación numérica pueden confirmarse estas afirmaciones. Para describir el sistema de solitones introducimos la probabilidad $P(N)$ de que el sistema se encuentre en un estado con N solitones de una dada amplitud $E_0(N)$ [67], con lo cual la densidad de energía turbulenta en el modo k es

$$W_k = \frac{1}{4\pi} \int dN P(N) N |E_k|^2, \quad (20)$$

integrar sobre N significa sumar sobre todos los estados, esta suma es incoherente, por lo cual en el integrando aparece N y no N^2 . En (5.20) E_k es la transformada de Fourier de la envolvente del soliton

$$E_k = \frac{E_0}{k_0} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2} \frac{k}{k_0}\right). \quad (21)$$

Para calcular (5.20) seguimos el razonamiento de Kingsep et al. [67]. La densidad de energía total que consideramos constante (por lo menos respecto al tiempo característico de formación del espectro turbulento) es $W = N \mathcal{E}_s$, donde \mathcal{E}_s es la energía (electrostática) por solitón

$$\mathcal{E}_s = \frac{1}{4\pi L} \int_{-\infty}^{\infty} dz E_s^2 = \frac{1}{2\pi L} \frac{mc^2}{e\beta} E_o, \quad \mathcal{E}_s \sim E_o \quad (22)$$

donde L es la longitud de normalización. Además

$$k_o d_o \simeq \frac{e\sqrt{\beta}}{mc\omega_p} E_o, \quad k_o \sim E_o \quad (23)$$

con $d_o = c/\sqrt{\beta} \omega_p$. Dado que $W \simeq \text{const.}$, resultan $\mathcal{E}_s \sim k_o \sim N^{-1}$

$$k_o(N) = 2\pi L \left(\frac{e\beta}{mc^2} \right)^2 W N^{-1}, \quad (24)$$

y

$$E_o(N) = 2\pi L \frac{e\beta}{mc^2} W N^{-1}. \quad (25)$$

Entonces

$$W_k = \frac{m^2 c^4}{4\pi e^2 \beta^2} \int dN P(N) N \text{sech}^2 \left[\frac{1}{4LW} \left(\frac{mc^2}{e\beta} \right)^2 k N \right]. \quad (26)$$

La función hiperbólica produce un corte de la integral alrededor de $N = N_{ok}$,

$$N_{ok} \equiv 4L \left(\frac{e\beta}{mc^2} \right)^2 W k^{-1}, \quad (27)$$

de donde resulta

$$W_k \simeq \frac{m^2 c^4}{4\pi e^2 \beta^2} \int_0^{N_{ok}} dN P(N) N. \quad (28)$$

Tomando una distribución de probabilidad uniforme $P(N) = 1/L$, es

decir el análogo al espectro de equipartición de Rayleigh-Jeans, obtenemos un espectro similar a (5.19), $W_k \sim k^2$,

$$W_k = \frac{2}{\pi} L \left(\frac{e\beta}{mc^2} \right)^2 W^2 k^{-2}. \quad (29)$$

Por lo tanto, sea a través del colapso o de la interacción entre los solitones, una vez alcanzado el estado turbulento (ergódico), el espectro en la región inercial es un espectro de potencia con índice -2.

El próximo problema es encontrar el ancho de banda del rango inercial, donde (5.29) es válida. Para pequeños números de onda, la región inercial está conectada con la región fuente, donde predominan las interacciones modulantes. El estado del sistema en esta región puede ser caracterizado como un estado en donde los solitones se encuentran empaquetados apretadamente. En esta situación habrá un número máximo de solitones en una dada longitud L

$$N_{\text{máx}} = k_0(N_{\text{máx}}) L = \sqrt{2\pi} \frac{e\beta}{mc^2} L W^{1/2}, \quad (30)$$

lo cual corresponde a un número de onda característico de las interacciones modulantes, $k_M = \frac{2}{\pi} k_0(N_{\text{máx}})$,

$$k_M = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\sqrt{\beta} \omega_p}{c} \left(\frac{\beta W}{8\pi n mc^2} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{e\beta}{mc^2} W^{1/2}. \quad (31)$$

Por consiguiente la escala turbulenta más grande del rango inercial será $\lambda_M = 2\pi k_M^{-1}$, que llamamos longitud modulacional. Por otra parte, debe haber un corte superior del espectro, a

grandes números de onda, a cierto $k=k_c$ ($\lambda_c = 2\pi k_c^{-1}$ longitud de coherencia) por encima del cual el espectro caerá más rápidamente que k^{-2} . El valor de la longitud de coherencia λ_c puede derivarse suponiendo que el sistema evoluciona del estado (5.30) a un estado con $N=N_{\min}$ donde los solitones se encuentran bien separados, por ejemplo mediante sucesivos procesos de fusión. Considerando que a través de todos esos procesos el flujo de energía espectral permanece constante, como en (5.18), y recordando que en un plasma relativista se satisface (2.58) es decir $W_f^l / W_o^l = \beta$, podemos escribir

$$\beta = \frac{(\int dk W_k)_f}{(\int dk W_k)_o} \approx \frac{W_{k_c} \Delta k_c}{W_{k_M} \Delta k_M}, \quad (32)$$

y usando además $W_k \sim k^{-2}$ y $\Delta k \sim k$, encontramos

$$\beta = k_c / k_M, \quad (33)$$

y por lo tanto

$$k_c = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\omega_p}{\sqrt{\beta} c} \left(\frac{\beta W}{8\pi n m c^2} \right)^{1/2}. \quad (34)$$

La ecuación (5.34) implica que el estado con $N=N_{\min}$ solitones, puede describirse como un arreglo en el cual la separación de los solitones es del orden de λ_M mientras que su ancho es del orden de λ_c . La amplitud de los solitones es $E_o(k_c) \approx \beta^{-1} E_o(k_M)$,

$$E_o(k_c) = \frac{\pi}{2} \frac{m c^2}{e \beta} k_c. \quad (35)$$

Es decir que para $N=N_{\min}$, los solitones están perfectamente separados y futuras interacciones entre solitones son

improbables, por lo cual se puede decir que λ_M es del orden del libre camino medio de los solitones.

La densidad de energía turbulenta W es una fracción βW_0^l de la energía suministrada por los haces de partículas ultrarrelativistas. Esta energía W_0^l puede ser aproximadamente la energía de los haces ϵ_b , la cual es a su vez del mismo orden que $\epsilon_p = nmc^2\beta^{-1}$, la densidad de energía de las partículas del plasma, por lo tanto

$$W = \beta W_0^l = \beta \epsilon_p = nmc^2. \quad (36)$$

Suponiendo los valores $n=10^{10} \text{ cm}^{-3}$ y $\beta=10^{-3}$ para la densidad y la temperatura del plasma, encontramos que $W=8 \cdot 10^3 \text{ erg. cm}^{-3}$. Esto nos permite estimar los valores de las longitudes características λ_M y λ_c , que pueden compararse con las observaciones.

A partir de estos resultados podemos describir semicualitativamente la turbulencia del plasma magnetosférico (Fig. 5.1).

(i) Región fuente: en esta región la inestabilidad modulacional conduce a la formación de un arreglo (unidimensional debido al fuerte campo magnético externo) de solitones de diferentes escalas espaciales, sobre los cuales se distribuye uniformemente la densidad de energía turbulenta

$$W_k = \text{const.}, \quad k \lesssim k_M. \quad (37)$$

Este espectro se mantiene hasta números de onda del orden de k_M . Usando los valores numéricos de arriba [13] resulta $\lambda_M = 7 \cdot 10^4$ cm, lo cual corresponde a frecuencias del orden de $\nu_0 \propto \frac{\sqrt{\beta} \omega_p}{2\pi} \approx 40$ MHz.

(ii) Región inercial: los procesos de colapso unidimensional inducido por fuentes de plasmones como la inestabilidad de haces, y de fusión e interacción de solitones generan un flujo de energía turbulenta hacia la zona de disipación. El espectro en este rango es un espectro de potencia con índice espectral -2 , el cual se extiende hasta números de onda del orden de k_c . La longitud de coherencia es $\lambda_c \approx 70$ cm.

(iii) Región de disipación: para longitudes menores que la longitud de coherencia, la probabilidad de fusión de solitones decrece debido a que los solitones están separados por distancias mucho mayores que su ancho, y por lo tanto no se superponen. Por otra parte sabemos de la discusión en la Sec. 4.3, fundamentada en el formalismo Lagrangiano, que los sucesivos procesos de fusión conducen a una disminución del impulso de los solitones, dado que parte del impulso es acarreado por las ondas a , lo que significa que tienden a detenerse. Por lo tanto la probabilidad de encontrar un estado con $N_{\min}/2$ solitones es mucho más pequeña que aquella con N_{\min} solitones. Por lo que puede esperarse un decrecimiento exponencial en el espectro por encima de k_c .

$$W_k \propto e^{-k/k_c}, \quad k \geq k_c. \quad (38)$$

Para mantener un estado de turbulencia estacionaria pueden operar dos tipos de mecanismos disipativos. El debilitamiento no-lineal Γ_l^{NL} debido al decaimiento de las ondas l , es eficiente para todo número de onda. Mientras que en la región $k=k_* = \omega_p / \sqrt{2} c$, opera el amortiguamiento Landau Γ^L , por el cual se transfiere la energía de las ondas l a las partículas resonantes.

5.2 LOS MECANISMOS DE RADIACION

5.2.1 Amplificación de Ondas de Alfvén

Los mecanismos radiativos propuestos para explicar la radioemisión de los pulsars se basan en distintos efectos:

(i) La existencia de inestabilidades electrostáticas del plasma y la posible formación de racimos de partículas [104][13][23][20] aunque la evolución no-lineal de esta inestabilidad no ha sido investigada;

(ii) La existencia de inestabilidades electromagnéticas, en general en la aproximación hidrodinámica [53][52] que de alguna manera conducen a la radiación observada, aunque tampoco en este caso se han estudiado los fenómenos no-lineales a los que eventualmente conducen esas inestabilidades. En esta dirección son importantes los trabajos de Pellat et al. [6][7], en los cuales se establece un acoplamiento entre los modos electrostáticos y electromagnéticos de la inestabilidad haz plasma;

(iii) El efecto maser [40][78] y

(iv) Mecanismos asociados a la presencia de solitones [63]

[22][50].

Tal vez una idea que sale del marco de (i)-(iii) es la de Kaplan y Tsytovich [62][125] que proponen como elemento esencial la existencia de un plasma turbulento, donde son los efectos colectivos no-lineales los dominantes. De alguna manera la idea de que los solitones pueden estar vinculados a la emisión coherente está en esta misma línea. Sin embargo, sus trabajos originales se basaban en la excitación de ondas de Alfvén por la interacción de resonancia de ciclotrón, la cual no opera en un plasma de electrones y positrones [50][141]. Las ondas de Alfvén son apropiadas para explicar la radioemisión debido a que son excitadas alrededor de la frecuencia del plasma, su debilitamiento es muy pequeño y se convierten en ondas electromagnéticas al salir del plasma. Por otra parte, si hay fuertes interacciones que conduzcan a la equipartición de la energía turbulenta de las ondas de Alfvén y electrostáticas, se obtienen valores consistentes con los observados de la temperatura de brillo.

A pesar de que el mecanismo de excitación de ondas de Alfvén mediante resonancia de ciclotrón no existe en un plasma de electrones y positrones, es posible su generación en sistemas haz-plasma, por interacción Cherenkov. Además operan mecanismos no-lineales como el decaimiento de ondas de Langmuir en ondas de Alfvén, o la radiación de ondas de Alfvén durante la colisión de solitones, cuyo efecto es la generación de ondas de Alfvén. Por

lo tanto, a pesar de que la inestabilidad de ciclotrón no puede ser fuente de excitación de turbulencia, un nivel de ondas de Alfvén puede ser inferido, teniendo en cuenta las condiciones reales de la magnetosfera. El problema es entonces determinar si las ondas de Alfvén pueden ser amplificadas por mecanismos no-lineales, los cuales permitan un crecimiento exponencial de su intensidad hasta alcanzar los niveles observados de temperatura de brillo de la radioemisión (radiación coherente).

En un importante trabajo Tsytovich [124] exploró un nuevo tipo de inestabilidad no-lineal. El demostró que, dado un espectro suficientemente ancho de ondas electromagnéticas, resonantes o no-resonantes, puede haber absorción o amplificación no-lineales de las ondas no-resonantes por las partículas que sufren calentamiento resonante por interacción con la turbulencia de Langmuir (por ejemplo amortiguamiento Landau). Si tanto las partículas del plasma como las ondas turbulentas tienen distribuciones isotrópicas solo hay absorción, pero si aparece algún tipo de anisotropía, en lugar de absorción se produce la amplificación de las ondas electromagnéticas, creciendo su densidad de energía respecto de su nivel inicial. Este proceso puede ser analizado para las ondas de Alfvén en un pulsar, considerando las partículas que resuenan con la turbulencia de Langmuir en la región de disipación, cuya frecuencia característica es $\omega = \omega_p / \beta$ y la densidad de energía electrostática es $W^L = W_0^L = \beta^{-1} \text{mm}^2$. Por lo tanto, puede esperarse que la tasa de crecimiento sea proporcional a la densidad de

energía en ondas 1, y entonces deberemos calcular la permitividad no-lineal ϵ_{1k}^{NL} , la cual será cuadrática en el campo eléctrico longitudinal. Tomando solo los términos proporcionales, a $|E_z|^2 E_1$ en las corrientes no-lineales, los cuales son los únicos relevantes, la ecuación de la cual derivaremos ϵ_{1k}^{NL} es de la forma

$$(\omega^2 \epsilon_{1k} - c^2 k^2) |E_{1k}|^2 = \int d_{12} \Theta_{12} E_{zk_1} E_{zk_2} |E_{1k}|^2, \quad (39)$$

donde $\Theta_{12} = \Theta_{k_1, k_2}$ es la respuesta no-lineal efectiva de tercer orden, la cual en general también incluye la contribución de los campos virtuales de segundo orden, como hemos visto en el Capítulo IV. En el presente caso esas corrientes de segundo orden, explícitamente escritas en (4.25) y (4.27), dependen de los campos electromagnéticos a través de las combinaciones

$$E_{k_1} (E_{k_2} \wedge e_z), \quad E_{zk_1} (E_{k_2} \wedge e_z)$$

las cuales no conducen a términos de la forma (5.39). Entonces la única parte proporcional a $E_{zk_1} E_{zk_2} E_{1k_3}$ de la corriente transversal de tercer orden (de la cual (5.39) se deriva) que contribuye a ϵ_{1k}^{NL} es

$$j_{1k} = -\frac{ic^2}{4\pi B_0^2} \int d_{123} (1 - \epsilon_{k_2}^l) \frac{k_2 k_3}{\omega_3} E_{zk_1} E_{zk_2} E_{1k_3}. \quad (40)$$

Esta ecuación proviene de

$$j_{1k} = \sum_{\pm} e \int dp (\underline{u}_{\pm}^{(2)} f^{(1)})_k, \quad (41)$$

donde

$$\underline{u}_{\perp k}^{(2)} = -\frac{c^2}{B_0^2} \int d_{12} \frac{k_2}{\omega_2} E_{zk_1} \underline{E}_{\perp k_2}, \quad (42)$$

y donde $f_k^{(1)}$ está definida en (4.3). Insertando (5.40) en la ecuación de Maxwell

$$(\omega^2 \underline{E}_{\perp k} - c^2 k^2) \underline{E}_{\perp k} = -4\pi i \omega \underline{j}_{\perp k}, \quad (43)$$

y haciendo el promedio con la ayuda de

$$\langle \underline{E}_{\perp k} \underline{E}_{\perp k'}^* \rangle = |\underline{E}_{\perp k}|^2 \delta(k - k'), \quad (44)$$

obtenemos

$$(\omega^2 \tilde{\underline{E}}_{\perp k} - c^2 k^2) |\underline{E}_{\perp k}|^2 = 0, \quad (45)$$

donde $\tilde{\underline{E}}_{\perp k} = \underline{E}_{\perp k} + \underline{E}_{\perp k}^{NL}$,

$$\underline{E}_{\perp k}^{NL} = \frac{c^2}{B_0^2} \int dk' (1 - \epsilon_{k'}^l) \frac{k k'}{\omega'} |E_{zk'}|^2. \quad (46)$$

La tasa de crecimiento se define por

$$\gamma_k^{NL} = -\frac{\omega^2 \text{Im} \underline{E}_{\perp k}^{NL}}{\partial_{\omega} \omega^2 \text{Re} \underline{E}_{\perp k}}, \quad (47)$$

que puede ser inmediatamente calculada, recordando que

$$\text{Im} \epsilon_k^l = -\frac{8\pi^2 e^2}{\omega} \int dp v \partial_p f_0 \delta(\omega - kv), \quad (48)$$

y usando la expresión (3.57) para $\underline{E}_{\perp k}$

$$\gamma_k^{NL} = -\frac{4\pi^2 e^2 c^2}{B_0^2} \int dk' \int dp v \partial_p f_0 \frac{k k'}{\omega \omega'} |E_{zk'}|^2 \delta(\omega - k'v). \quad (49)$$

Por lo tanto, para el grueso de las partículas del plasma, para las cuales $\partial_p f_0 < 0$, γ_k^{NL} describe la amplificación de las ondas

de Alfvén no-resonantes. El origen de la inestabilidad es la anisotropía de las ondas de Langmuir, las cuales forman un arreglo unidimensional. Una estimación de (5.49) da

$$\gamma^{NL} \approx \frac{\omega_p}{\sqrt{\beta}} \frac{W_0^L}{W_B} \approx \sqrt{\beta} \omega_p \Gamma^2 \quad (50)$$

(dado que para partículas resonantes $\omega \approx \omega_p / \sqrt{\beta}$ y $W_0^L \approx n \beta^{-1} m c^2$). Una importante característica de este proceso es que γ^{NL} es prácticamente independiente de la frecuencia, lo que implica una amplificación pareja del ancho espectro de las ondas de Alfvén inicial. La forma real de ese espectro y por lo tanto el espectro de la radioemisión observada no queda determinado por este análisis, sin embargo es presumible que esté íntimamente relacionado con el espectro de fondo de la turbulencia de Langmuir, la que establece una definida jerarquía de escalas espaciales.

5.2.2 Radiación Durante la Colisión Haz-Solitón.

Es interesante considerar aparte de la amplificación de las ondas de Alfvén, la interacción de los haces de partículas ultrarrelativistas con el campo eléctrico estocástico de Langmuir presente. Melrose [78] desarrolló una teoría de la emisión amplificada por aceleración lineal de partículas relativistas que se propagan a lo largo de las líneas de campo magnético en un

campo eléctrico monocromático dado. Este proceso es básicamente bremsstrahlung eléctrico o una especie de dispersión Compton, en el cual las partículas son aceleradas por un campo eléctrico ondulado. Melrose supuso que la amplitud de las oscilaciones del campo eléctrico, cuya frecuencia asume cercana a la frecuencia del plasma, corresponde a una densidad de energía comparable con la de las partículas relativistas. Un punto que no aparece suficientemente claro en este modelo es el origen de las oscilaciones del campo eléctrico. Además, la tasa de crecimiento fue calculada suponiendo que la totalidad del plasma fluye a través del campo eléctrico, lo cual no es consistente con los modelos actuales de magnetosfera, en los cuales aparece una configuración haz-plasma. En el caso real de un sistema haz-plasma, su tasa de crecimiento debe ser corregida por un factor $n_b/n \ll 1$, lo cual hace que el mecanismo propuesto sea poco eficiente y no se alcance una amplificación suficiente de la radiación electromagnética.

Por otra parte, este tipo de mecanismo es más apropiado para explicar la radiación infrarroja o visible que la radioemisión, debido a que el efecto Doppler corre la frecuencia a $\omega'_p \approx \omega_p \gamma^2/2$, que es del orden de 10^{15} Hz, para parámetros aceptables.

Procesos de dispersión Compton que convierten la turbulencia de plasmones en radiación de alta frecuencia, en la banda infrarrojo-óptica, fueron estudiados concienzudamente [62], y en general se encuentra reabsorción en lugar del efecto maser

esperado por Melrose. Ahora vamos a analizar estos mecanismos en el caso de la turbulencia de solitones. Supondremos un espectro determinado de la turbulencia de Langmuir ($W \sim k^{-2}$) y una distribución arbitraria para las partículas (en general esta será una ley de potencias). El proceso que investigaremos es la emisión de radiación electromagnética que resulta de la aceleración estocástica de los haces cuando son dispersados por los solitones.

La ecuación de movimiento de una partícula relativista en el campo eléctrico de un solitón puede escribirse como

$$\frac{d}{dt} \underline{v}(t) = \frac{e}{m\gamma(t)} \underline{E}, \quad \underline{v}(t) = \frac{d}{dt} \underline{r}(t) \quad (51)$$

la transformada de Fourier de \underline{E} es

$$\underline{E}(\underline{k}, \omega) = \frac{E_0}{k_0} \underline{e}_z \operatorname{sech} \left[\frac{\pi}{2k_0} (k_z - \kappa) \right] \delta(\omega - \omega_0 - \Omega - K_z V) \quad (52)$$

o suponiendo $\omega_0 \gg \Omega - K_z V$, y despreciando la irrelevante fase κ

$$\underline{E}(\underline{k}, \omega) = E_s(k_z) \underline{e}_z \delta(\omega - \omega_0), \quad E_s(k_z) = \frac{E_0}{k_0} \operatorname{sech} \left(\frac{\pi}{2k_0} k_z \right) \quad (53)$$

La corriente de una carga que se mueve sobre una trayectoria $\underline{r} = \underline{r}(t)$ es

$$\underline{j}(\underline{r}, t) = e \underline{v}(t) \delta(\underline{r} - \underline{r}(t)), \quad (54)$$

o

$$\underline{j}(\underline{k}, \omega) = e \int \frac{dt}{2\pi} \underline{v}(t) e^{i\omega t - i\underline{k} \cdot \underline{r}(t)} \quad (55)$$

Suponiendo que la partícula ultrarrelativista se desvía

débilmente cuando pasa a través del campo del solitón, tenemos

$$\underline{r}(t) = \underline{r}_0 + \underline{v}_0 t + \underline{r}^{(1)}(t), \quad (56)$$

donde $\underline{v}_0 = v_0 \underline{e}_z$ es cercana a la velocidad de la luz. Insertando (5.56) en (5.55), obtenemos en la aproximación dipolar

$$\underline{j}(\underline{k}, \omega) = e e^{-i\underline{k} \cdot \underline{r}_0} \int \frac{dt}{2\pi} \left[\frac{d}{dt} \underline{r}^{(1)} - i(\underline{k} \cdot \underline{r}^{(1)}) \underline{v}_0 \right] e^{i\omega' t}, \quad (57)$$

donde $\omega' = \omega - \underline{k} \cdot \underline{v}_0 \approx \omega/2\gamma^2$ es la frecuencia corrida por efecto Doppler. Linealizando la ecuación de movimiento (5.51) y transformando Fourier, obtenemos

$$-\omega'^2 \underline{r}^{(1)}(\omega') = \frac{e}{m\gamma^3} \int \frac{dt}{2\pi} \underline{E}(\underline{r}(t), t) e^{i\omega' t}. \quad (58)$$

Usando ahora (5.53), la integral de la derecha de (5.58) se expresa como

$$\frac{1}{v_0} \int d\omega E\left(\frac{\omega - \omega'}{v_0}, \omega\right) = \frac{1}{v_0} E_s\left(\frac{\omega' - \omega_0}{v_0}\right). \quad (59)$$

Por lo tanto la corriente resulta ser

$$\underline{j}(\underline{k}, \omega) = \frac{ie^2}{m\gamma^3 v_0} e^{-i\underline{k} \cdot \underline{r}_0} \frac{\omega}{\omega'^2} \underline{e}_z E_s\left(\frac{\omega' - \omega_0}{v_0}\right). \quad (60)$$

La distribución espectral de las ondas radiadas por la partícula se define como

$$u(\theta, \omega) = \frac{n_i \omega^2}{(2\pi c)^3} 2\pi \sin^2 \theta |\underline{j}(\underline{k}, \omega)|^2, \quad (61)$$

donde θ es el ángulo entre \underline{e}_z y \underline{k} , y n_i el índice de refracción, que para ondas transversales es cercano a 1 para

frecuencias por encima de $\omega = \sqrt{\beta} \omega_p$. Sustituyendo (5.60) en (5.61), obtenemos

$$u(\theta, \omega) = \frac{e^4}{m^2 \gamma^6 v_o} \frac{n_i}{4\pi c^3} \theta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right)^4 \left| E_s \left(\frac{\omega_i - \omega}{v_o} \right) \right|^2. \quad (62)$$

La energía total radiada por partícula $U_p(\theta, \omega)$ puede derivarse de la superposición incoherente de la emisión sobre todos los solitones

$$U_p(\theta, \omega) = \int dW P(N) N u(\theta, \omega), \quad (63)$$

de donde, usando también (5.29), obtenemos

$$U_p(\theta, \omega) = \frac{n_i}{2\pi^3} \frac{e^6}{m^4 c^7} L W^2 \frac{\theta^2}{\gamma^6} \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right)^6 \omega^{-2} \quad (64)$$

Por lo tanto la radiación emitida por una partícula que cruza el campo estocástico turbulento de los solitones, tiene un espectro de potencia $U_p \sim \omega^{-2}$ con índice -2. El máximo de la energía radiada puede situarse cerca de $\omega_o \gamma^2/2$, en la banda infrarrojo-óptica. Puesto que esta radiación no está sujeta a la acción maser, este mecanismo es presumiblemente de baja eficiencia. Por otro lado, dado que las emisiones de radio y de alta frecuencia están ligadas con la turbulencia de Langmuir presente, es de esperar que estén conectadas entre sí. La evolución futura de las ondas transversales, que pueden ir bajando su frecuencia por medio de interacciones no-lineales y eventualmente amplificarse, deberá ser explorada.

VI. CONCLUSIONES

1.

Hemos presentado una teoría sobre la excitación y dinámica de la turbulencia fuerte, en un plasma de electrones y positrones en un fuerte campo magnético, en las condiciones de la magnetosfera de los pulsars. Las ondas de Langmuir generadas por la interacción haz-plasma evolucionan mediante las interacciones no-lineales onda-onda y onda-partícula de tal forma que van disminuyendo su número de onda y almacenando la energía turbulenta alrededor de $k=0$. Se forma entonces un condensado de Langmuir que resulta inestable frente a perturbaciones modulacionales, las cuales en el caso especial del plasma de electrones y positrones (y en general para plasmas ultrarrelativistas) en el límite de campo magnético infinito, están completamente descritas por una ecuación de Schrödinger con no-linealidad cúbica. Sin embargo, en el problema de la radioemisión de los pulsars, los modos electromagnéticos son fundamentales, especialmente las ondas de Alfvén. Cuando se tiene en cuenta la componente transversal del impulso de las partículas, surge la posibilidad de que operen otras interacciones no-lineales que involucren a las ondas de Langmuir, modificando su dinámica. El tratamiento consistente de esos

procesos no-lineales, como el decaimiento $1 \rightarrow a+a$, conduce nuevamente a una ecuación de Schrödinger no-lineal pero con un campo auto-consistente, el cual toma en cuenta esencialmente las fluctuaciones de densidad no-locales producidas por el campo de Alfvén.

2.

La evolución no-lineal de la inestabilidad modulacional conduce a la formación de solitones. Dada la naturaleza cuasi-unidimensional de un plasma en un campo magnético superfuerte, los solitones resultan entidades estables, por lo tanto en base a sus propiedades es posible diseñar una teoría aproximada de la turbulencia fuerte. De la misma manera que en el caso de la turbulencia débil la teoría se desarrolla a partir de las interacciones de los modos de oscilación presentes. Contrariamente a los solitones S_3 , es decir aquellos descritos por la ecuación de Schrödinger cúbica, en presencia de un campo auto-consistente, como el campo de fluctuaciones de densidad de Alfvén, las interacciones entre solitones producen la ergodización del estado del plasma. En efecto, en base a una formulación lagrangiana de las ecuaciones de campo $S_3-\phi$, hemos obtenido las constantes de movimiento mediante las cuales determinamos la posibilidad de la producción de ciertas interacciones. Estas interacciones están en general acompañadas por la emisión de ondas de Alfvén. Hemos establecido,

semicuantitativamente, las condiciones y las propiedades del proceso de fusión de solitones, que visto en relación al espectro de la turbulencia, produce un flujo de energía turbulenta hacia grandes números de onda. Esta dirección del flujo de la energía turbulenta es contrario al proceso de condensación de Langmuir y es la propiedad esencial de la turbulencia fuerte de Langmuir.

3.

El estado turbulento se caracteriza por un espectro continuo de escalas espaciales. Podemos distinguir tres regiones por la naturaleza de los procesos físicos que en ellas se desarrollan,

(i) La región fuente con un espectro constante, en la cual se producen los solitones como resultado de la evolución de las perturbaciones modulacionales;

(ii) La región inercial, donde se establece un espectro de potencia a partir de los procesos de fusión y colapso de solitones. Si bien como dijimos los solitones son estables, en presencia de una fuente de plasmones, producidos por ejemplo por los haces ultrarrelativistas, tienden autosimilarmente a aumentar su amplitud y consiguientemente a disminuir su ancho. Al igual que la fusión de solitones, el colapso produce un flujo de energía turbulenta hacia la región de disipación. Esta contracción autosimilar de los solitones está regulada por el campo de Alfvén, y se produce a velocidad prácticamente constante, igual a la velocidad de Alfvén. El espectro de potencia

resultante de las interacciones de los solitones tiene índice espectral -2 , y se mantiene hasta que los solitones están muy separados y la cadena de sucesivas fusiones se corta. En general, las fusiones tienden a disminuir la velocidad (el impulso) de los solitones. Por lo tanto, aparece una longitud característica, el corte superior del rango inercial del espectro turbulento, a partir de la cual la energía turbulenta disminuye bruscamente, y que llamamos longitud de coherencia;

(iii) La región de disipación, donde la energía turbulenta es transformada en energía de las partículas (calentamiento y aceleración) y en radiación.

4.

Existen varios efectos lineales y no-lineales que pueden ser fuente de ondas de Alfvén. En relación a la radioemisión, estas ondas son muy interesantes dado que son débilmente amortiguadas y pueden por lo tanto abandonar el plasma, convirtiéndose en ondas electromagnéticas. Un efecto lineal que resulta en la excitación de ondas de Alfvén, es la interacción Cherenkov con partículas (para ondas que no se propagan paralelas al campo magnético). Este proceso requiere una inversión en la función de distribución y por consiguiente no resulta efectivo por sí mismo, como para alcanzar los niveles de densidad de energía de la radiación observados. Efectos no-lineales de excitación de ondas de Alfvén son el decaimiento de ondas de Langmuir, y la generación durante

las colisiones de solitones. Por lo tanto, un cierto nivel de ondas de Alfvén debe existir además de las ondas de Langmuir, aunque su densidad de energía sea mucho menor que la energía en las ondas l . Así que, para poder vincular la radiación observada con las ondas de Alfvén, es fundamental encontrar mecanismos de amplificación de estas ondas, mediante los cuales se transfiera a las ondas a la energía de las partículas y de la turbulencia de Langmuir. Hemos estudiado un proceso de este tipo, que consiste en la amplificación de ondas a no-resonantes por partículas que sufren interacción resonante con ondas de Langmuir (es un proceso no-lineal de tercer orden). La tasa de crecimiento resulta proporcional a la densidad de energía en la turbulencia de Langmuir, y la inestabilidad es dirigida por la anisotropía de esas ondas. Esta anisotropía es a su vez una consecuencia del fuerte campo magnético, y entonces la inestabilidad debe conducir a la equipartición de la energía de las partículas, de Alfvén y de Langmuir $\epsilon \approx W^l \approx W^a$. Básicamente este mecanismo de amplificación es independiente de la frecuencia de las ondas amplificadas.

5.

Hemos investigado también la generación de ondas electromagnéticas durante la dispersión de partículas de los haces por el campo eléctrico estocástico de los solitones. La emisión dipolar en este proceso esta conectada con la turbulencia

de Langmuir, que determina el espectro del campo eléctrico de los solitones. Sin embargo, a diferencia de las ondas de Alfvén, estas ondas no son amplificadas sino que en general existe reabsorción (por lo menos lineal). Normalmente, y por efecto Doppler, las ondas electromagnéticas generadas por este mecanismo tienen una frecuencia pico en el rango infrarrojo-óptico.

6.

Según las observaciones la señal de los pulsars $I(t)$ es un proceso estocástico en el cual estan involucradas básicamente dos escalas temporales, la característica de los micropulsos $\sim 1 \mu s$ - $1 ms$, $a(t)$, y la de los elementos coherentes responsables de la alta temperatura de brillo $\sim 1 ns$, $n(t)$

$$I(t) = a(t) n(t)$$

[101]. Los análisis de auto-correlación de la intensidad $I(t)$ indican que $n(t)$ es un ruido blanco gaussiano, y que la coherencia es de banda ancha. A partir de las condiciones físicas imperantes en la magnetosfera hemos inferido que el plasma se encuentra en un estado de turbulencia fuerte, cuya estructura básica está formada por solitones que interactúan entre sí a través del campo de ondas de Alfvén. Estos solitones son los elementos coherentes fundamentales, y están por lo tanto vinculados a $n(t)$. De la teoría deducimos una escala característica de la coherencia, $\lambda_c = 70 cm$, que es del orden de

magnitud correcto. Además, de la naturaleza turbulenta del plasma, se infiere que la coherencia es de banda ancha, es decir que no está confinada a algunos modos sino que existe un espectro continuo de escalas espaciales entre las que se distribuye la energía turbulenta. Este punto de vista, aunque actualmente en discusión, está suficientemente respaldado por las observaciones [27-28]. El espectro de la turbulencia de Langmuir, que suponemos determina el espectro de la radioemisión observada, puede tener en principio dos formas: (i) en el caso de la turbulencia bien desarrollada (ergodicidad) encontramos un espectro de potencia con índice espectral -2 , que cualitativamente coincide con los espectros observados [108] de algunos pulsars (ver Fig. 4.1); (ii) a bajos niveles de turbulencia, en el caso de débil interacción entre los solitones, es de esperar un espectro del tipo $W_k \sim \text{sech}^2 k/k_0$.

Los posibles mecanismos de radioemisión pueden ser variados, aquí hemos estudiado la posibilidad de un efecto maser no-lineal como la amplificación de ondas de Alfvén por la interacción entre la turbulencia de Langmuir y las partículas del plasma. Tal vez la dificultad principal de los mecanismos basados en las ondas de Alfvén está en que se requiere que la zona de emisión esté suficientemente alejada de la superficie del pulsar, y por otra parte estos mecanismos no se basan en el modo inestable más veloz como lo es el electrostático que genera las ondas de Langmuir. Por lo tanto pueden ser interesantes otros procesos que involucren directamente las ondas electromagnéticas de plasma.

En efecto, Pellat et al. [6-7] reconsideraron la inestabilidad haz-plasma teniendo en cuenta las dimensiones transversales finitas del haz y la curvatura de las líneas de campo magnético. En estas condiciones surge naturalmente un acoplamiento entre las ondas electrostáticas generadas por el haz y las ondas electromagnéticas de vacío, resultando de hecho que ambos modos son un solo tipo de onda. Esto hace pensar que los solitones pueden ser directamente la radiación coherente observada. Este es evidentemente un punto importante de investigación futura.

7.

Finalmente resumimos algunas estimaciones numéricas que caracterizan los procesos físicos fundamentales, en base a los siguientes parámetros

$$n = 10^{10} \text{ cm}^{-3}, \quad \beta = 10^{-3}, \quad \omega_p = 8 \cdot 10^9 \text{ Hz},$$

$$B_x = 10^5 \text{ G}, \quad r^2 = 2 \cdot 10^{-2}, \quad W^l \approx n m c^2.$$

a) Los distintos procesos tendrán lugar si sus tasas de crecimiento superan a la frecuencia característica asociada a la inhomogeneidad de la magnetosfera

$$\tau^{-1} \approx c/l \approx 10^4 - 10^5 \text{ s}^{-1}$$

b) Las ondas de Langmuir se excitan cerca de la superficie $B = 10^{12} \text{ Gauss}$, $n = 10^{14} - 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, y como vimos en el capítulo II

tiene una tasa de crecimiento que está determinada esencialmente por las partículas de menor energía

$$\Gamma_b \approx 10^8 - 10^9 \text{ s}^{-1}$$

Dado que Γ_b es mayor que el debilitamiento no-lineal de las ondas 1, Γ_b^{NL} , la inestabilidad haz-plasma conduce a la excitación de turbulencia de Langmuir.

c) La tasa de debilitamiento de las ondas 1, debido a su conversión en ondas \underline{a} es

$$\Gamma_l^{NL} \approx -\Gamma^2 (W^2 / n m c^2)$$

mientras que la tasa de crecimiento de las ondas \underline{a} por el mismo proceso es

$$\Gamma_D = \Gamma^2 (W^l / n m c^2) \sim 10^3 \text{ s}^{-1}$$

Es decir que el proceso $1 \rightarrow a+a$, resulta inefectivo para la producción de ondas \underline{a} , salvo en regiones muy alejadas de la superficie de la estrella de neutrones. Sin embargo durante la colisión de solitones pueden producirse ondas de Alfvén. Este proceso se caracteriza por un tiempo del orden del tiempo de interacción (4.117)

$$\tau_{int} \sim 10^{-5} - 10^{-8} \text{ s}$$

para solitones de anchos λ_M y λ_C respectivamente, y por un tiempo de colisión

$$\tau_c \sim 10^{-6} \text{ s}$$

El hecho de que el tiempo de colisión sea más corto que el tiempo

asociado a la inhomogeneidad, implica la posibilidad de que efectivamente se produzcan las interacciones entre los solitones que conducen al desarrollo de la turbulencia (aparte del proceso de colapso que depende de las condiciones de excitación de las ondas de Langmuir). Por otra parte hemos obtenido que durante el tiempo de interacción (en general para colisiones entre solitones de velocidades relativistas) es posible la generación de ondas de Alfvén con una energía comparable a la de los solitones iniciales

d) La amplificación no-lineal de ondas de Alfvén tiene una tasa

$$\gamma^{NL} \approx \sqrt{\beta} \omega_p \Gamma^2 \approx 10^6 s^{-1},$$

que en la región de emisión puede ser del orden de Γ_b con lo cual se debe producir una equipartición

$$W^l \approx W^a.$$

e) La longitud de modulación es $\lambda_c = 7 \cdot 10^4$ cm. y la de coherencia $\lambda_c = 70$ cm.

C. Benfante

Alvarez

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dr. Constantino Ferro Fontán por haber dirigido esta tesis, por sus fructíferos comentarios y orientación.

Esta tesis fue realizada como parte de un plan de trabajo de una beca interna del CONICET, con lugar de trabajo en el Instituto de Astronomía y Física del Espacio.

REFERENCIAS

- [1] Abdulloev, K. D., Bogolyubskij, I. L. y
Makhankov, V. G. (1975) Nuclear Fusion 15, 21.
- [2] Antipov, S. V., Nezlin, M. V., Snezhkin, E. N. y
Trubnikov, A. S. (1978) Sov. Phys. JETP 47, 506.
----- (1979) Sov. Phys. JETP 49, 797.
----- (1981) Sov. Phys. JETP 51, 874.
- [3] Arons, J. (1979) Space Sci. Rev. 24, 437.
- [4] Arons, J. (1981) IAU Symp. No. 95 "Pulsars" Ed.
W. Sieber y R. Wielebinski (Dordrecht:
Reidel) p. 69.
- [5] Arons, J. y Scharlemann, E. T. (1979) Astrophys. J
231, 854.
- [6] Asseo, E., Pellat, R. y Rosado, M. (1980) Astrophys,
J. 239, 661.
- [7] Asseo, E., Pellat, R. y Sol, H. (1981) IAU Symp.
No. 95 "Pulsars" Ed. W. Sieber y R. Wielebinski
(Dordrecht: Reidel) p. 111.
- [8] Baade, W. y Zwicky, F. (1934) Phys. Rev. 45, 138.
- [9] Bartel, N. (1981) IAU Symp. No. 95 "Pulsars" Ed. W.

- Sieber y R. Wielebinski (Dordrecht: Reidel) p. 177.
- [10] Bartel, N., Morris, D., Sieber, W. y Hankins, T.H.
(1982) *Astrophys. J.* 258,776.
- [11] Baym, G. y Pethick, C.J. (1979) *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 17,415.
- [12] Belkov, S.A. y Tsytovich, V.N. (1976) *Sov. Phys. JETP* 48,656.
- [13] Benford, G. y Bushauer, R. (1977) *Mont. Not. R. Astron. Soc.* 179,189.
- [14] Benford, G. y Smith, D.F. (1982) *Phys. Fluids* 25,1450.
- [15] Benford, G., Tzach, D., Kato, K. y Smith, D.F. (1980)
Phys. Rev. Letters 45,1182.
- [16] Benz, A.O. (1977) *Astrophys. J.* 211,270.
- [17] Bond, J., W. (1982) *Plasma Phys.* 24,1495.
- [18] Bogolioubov, N.N. y Chirkov, D.V. (1960) "Introduction
a la Theorie Quantique des Champs" (Paris: Dunod)
- [19] Boriakoff, V. y Ferguson, D. (1981) *IAU Symp. No. 95*
"Pulsars" Ed. W. Sieber y R. Wielebinski
(Dordrecht: Reidel) p. 191
---- p. 199.
- [20] Bushauer, R. y Benford, G. (1980) *Month. Not. R. Astron. Soc.* 190,945.
- [21] Buti, B. (1962) *Phys. Fluids* 5,1.
- [22] Buti, B. (1978) *Astrophys. Space Sci.* 58,89.
- [23] Cheng, A. y Ruderman, M. (1977) *Astrophys. J.* 212,800.

- [24] Chian, A.C.-L. y Kennel, C.F. (1983) *Astrophys. Space Sci.* 97,9.
- [25] Christiansen, P.J., Jain, P.J. y Stenflo, L. (1981) *Phys. Rev. Letters* 46,1333.
- [26] Cordes, J.M. (1976) *Astrophys. J.* 208,944.
- [27] Cordes, J.M. (1979) *Space Sci. Rev.* 24,567.
- [28] Cordes, J.M. (1981) *IAU Symp. No. 95 "Pulsars" Ed. W. Sieber y R. Wielebinski (Dordrecht: Reidel)* p. 115.
- [29] Degtyarev, L.M., Sagdeev, R.Z., Solovov, G.I., Shapiro, V.D., Shevchenko, V.I. (1980) *Sov. J. Plasma Phys.* 6,263.
- [30] Denavit, J. (1976) *Phys. Fluids* 19,972.
- [31] Franklin, R.N. (1977) *Rep. Prog. Phys.* 40,1369.
- [32] Freund, H.P., Haber, I., Palmadesso, P. y Papadopoulos, K. (1979) *Phys. Fluids* 23,518.
- [33] Freund, H.P. y Papadopoulos, K (1980) *Phys. Fluids* 23,1546.
- [34] Galeev, A.A., Krasnoselskikh, V.V. (1978) *Sov. J. Plasma Phys.* 4,62.
- [35] Galeev, A.A. y Sagdeev, R.Z. (1979) *Rev. Plasma Phys.* (New York: Consultants Bureau) Vol. 7, p. 1.
- [36] Galeev, A.A., Sagdeev, R.Z., Sigov, Y.S., Shapiro, V.D. y Shevchenko, V.I. (1975) *Sov. J.*

Plasma Phys. 1, 5.

- [37] Galeev, A. A., Sagdeev, R. Z., Shapiro, V. D. y
Shevchenko, V. I. (1977) Sov. Phys. JETP 45, 266
---- (1977) Sov. Phys. JETP 46, 711.
- [38] Gibbons, J., Thornhill, S. G., Wardrop, M. J. y
ter Haar, D. (1977) J. Plasma Phys. 17, 153.
- [39] Ginzburg, V. L. (1981) Sov. Phys. Usp. 24, 585.
- [40] Ginzburg, V. L. y Zheleznyakov, V. V. (1975) Ann. Rev.
Astron. Astrophys. 15, 19.
- [41] Ginzburg, V. L., Zheleznyakov, V. V. y Zaitzev, V. V.
(1969) Astrophys. Space Sci. 4, 464.
- [42] Gold, T. (1968) Nature 218, 731.
- [43] Goldman, M. V. y Nicholson, D. R. (1978) Phys. Rev.
Letters 41, 406.
- [44] Goldman, M. V., Reiter, G. F. y Nicholson, D. R. (1980)
Phys. Fluids 23, 388.
- [45] Goldreich, P. y Julian, W. H. (1969) Astrophys. J.
157, 869.
- [46] Goldstein, M. L., Smith, R. A. y Papadopoulos (1979)
Astrophys. J. 234, 683.
- [47] de Groot, J. S. y Kats, J. I. (1973) Phys. Fluids
16, 401
- [48] Gurnett, D. A. y Anderson, R. R. (1977) J. Geophys.
Res. 82, 632.
- [49] ter Haar, D. (1972) Phys. Reports 2, 57.

- [50] ter Haar, D. y Tsytovich, V.N. (1981) Phys. Reports
73(3),175.
- [51] Hankins, T.H. y Boriakoff, V. (1978) Nature 276,45.
- [52] Hardee, P.E. y Morrison, P.J. (1979) Astrophys.
J. 227,252.
- [53] Hardee, P.E. y Rose, W.K. (1976) Astrophys. J. 210,533.
---- (1978) Astrophys. J. 219,274.
- [54] Hewish, A., Bell, S.J., Pilkington, J.D.H., Scott,
P.F. y Collins, R.A. (1968) Nature, 217.709.
- [55] Heyvaerts, J. (1981) "Particle Acceleration in
Solar Flares", en "Solar Flares MHD" Ed.
E.R. Priest (New York: Gordon and Breach)
p.429.
- [56] Hinata, S. (1976) Astrophys. J. 203,223.
- [57] Istomin, Y.N., Petviashvili, V.I. y Pokhetelov, D.A.
(1978) Sov. J. Plasma Phys. 4,76.
- [58] Kadomtsev, B. (1979) "Phenomenes Collectifs dans
les Plasmas" (Moscou: Mir).
- [59] Kainer, S., Dawson, J. y Coffey, T. (1972)
Phys. Fluids 15,2419.
- [60] Kakutani, T. y Sugimoto, N. (1974) Phys. Fluids
17,1617.
- [61] Kaplan, S.A. y Tsytovich, V.N. (1973) Nature
Phys. Sci. 241,122.
- [62] Kaplan, S.A. y Tsytovich, V.N. (1973)

"Plasma Astrophysics" (Oxford: Pergamon)

- [63] Karpman, V. I., Norman, C. A., ter Harr, D. y
Tsyтовich, V. N. (1975) Physica Scripta 11, 271.
- [64] Kawamura, K y Suzuki, I (1977) Astrophys. J. 217, 832.
- [65] Kennel, C. F., Fujimura, F. S. y Pellat, R. (1979)
Space Sci. Rev. 24, 407.
- [66] Khakimov, F. K. y Tsyтовich, V. N. (1976)
Sov. Phys. JETP 43, 929. 4
- [67] Kingsep, A. S., Rudakov, L. I., y Sudan, R. N.
(1973) Phys. Rev Letters 31, 1482.
- [68] Kundu, M. R. y Vlahos, L. (1983) Space Sci. Rev.
Preprint.
- [69] Kwan, T., Dawson, J. L. y Lin, A. T. (1977) Phys.
Fluids 20, 581.
- [70] Landau, L. D. (1932) Phys. Zs. Sowietunion 1, 285.
(Collected Papers, Pergamon - Oxford)
- [71] Landau, L. D. (1938) Nature 141, 333.
- [72] Landau, L. D. (1946) Zh. Eks. Teor. Fis. 16, 574.
- [73] Landau, L. D. y Lifchitz, E. (1969) "Electrodynamique
des Mileaux Continus" (Moscou: Mir)
- [74] Lin, A. T., Dawson, J. M. y Okuda, H. (1975) Phys.
Fluids 17, 1995.
- [75] Lominadze, D. G. y Mikhailovskii, A. B. (1979)
Sov. Phys. JETP 49, 483.
- [76] Lominadze, D. G., Mikhailovskii, A. B. y Sagdeev, R. Z.

- (1979) Sov. Phys. JETP 50, 927.
- [77] Makhankov, V. G. (1978) Phys. Reports 35, 1.
- [78] Melrose, D. B. (1978) Astrophys. J. 225, 557.
- [79] Melrose, D. B. (1981) IAU Symp. No. 95 "Pulsars" Ed.
W. Sieber, R. Wielebinski (Dordrecht: Reidel)
p. 133.
- [80] Michel, F. C-. (1982) Rev. Mod. Phys. 54, 1.
- [81] Mikhailovskii, A. B. (1974) "Theory of Plasma
Instabilities" Vol. 1 (New York: Consultants
Bureau)
- [82] Mikhailovskii, A. B. (1980) Plasma Phys. 22, 133.
- [83] Mikhailovskii, A. B. (1980) Sov. J. Plas. Phys. 6, 336.
- [84] Mikhailovskii, A. B. (1981) Plasma Phys. 23, 413.
- [85] Mikhailovskii, A. B. (1982) Plasma Phys. 24, 1.
- [86] Morales, G. J., Lee, Y. C. y White, R. B. (1974)
Phys. Rev. Letters 32, 457.
- [87] Nicholson, D. R. y Goldman, M. V. (1978)
Phys. Fluids 21, 1766.
- [88] Oppenheimer, J. R. y Volkoff, G. M. (1939) Phys. Rev.
55, 374.
- [89] Pacini, F. (1967) Nature 216, 567.
- [90] Pacini, F. (1968) Nature 219, 145.
- [91] Papadopoulos, K. (1975) Phys. Fluids 18, 1769.
- [92] Papadopoulos, K. (1979) Space Sci. Rev. 24, 511.
- [93] Papadopoulos, K., Goldstein, M. L. y Smith, R. A.

- (1974) *Astrophys. J.* 190, 175.
- [94] Pataraya, A. y Melikidze, G. (1980) *Astrophys. Space Sci.* 68, 71.
- [95] Pereira, N.R., Sudan, R.N. y Denavit, J. (1977) *Phys. Fluids* 20, 271.
- [96] Pikelner, S.B. y Tsytovich, V.N. (1975) *Sov. Astron.* 19, 450.
- [97] Pitaevskii, L.P. (1961) *Sov. Phys. JETP* 12, 1008.
- [98] Priest, E.R. (1981) "Solar Flare Magnetohydrodynamics" Editor (New York: Gordon and Breach
- [99] Pritchett, P.L. (1984) UCLA Preprint PPG-776.
- [100] Radhakrishnan, V. (1982) *Contemp. Phys.* 23, 207.
- [101] Rickett, B.J. (1975) *Astrophys. J.* 197, 185.
- [102] Rickett, B.J. y Cordes, J.M. (1981) *IAU Symp.* No. 95 "Pulsars" Ed. W. Sieber, R. Wielebinski (Dordrecht: Reidel) p. 107.
- [103] Rudakov, L.I. y Tsytovich, V.N. (1978) *Phys. Reports* 40, 1.
- [104] Ruderman, M.A. y Sutherland, P.G. (1975) *Astrophys. J.* 196, 51.
- [105] Rylov, Y.A. (1981) *Astrophys. Spac. Sci.* 75, 423.
- [106] Sagdeev, R.Z., Shapiro, V.D. y Shevchenko, V.I. (1980) *Sov. J. Plasma Phys.* 6, 205.
- [107] Scott, A.C., Chu, F.Y. y McLaughlin, D.W. (1973)

Proceedings IEEE, 61,1443.

[108] Sieber, W. (1973) Astron. Astrophys. 28,237.

[109] Smith, F.G. (1977) "Pulsars" (Cambridge Univ. Press)

[110] Smith, R.A., Goldstein, M.L. y Papadopoulos, K.

(1976) Solar Phys. 46,515.

[111] Staelin, D.H. y Reifenstein, E.C. (1968) Science

162,1481.

[112] Stenzel, R.L., Wong, A.Y. y Kim, H.C. (1974) Phys.

Rev. Letters 32,654.

[113] Stinebring, D. y Cordes, J.M. (1981) Astrophys.

J. 249,704.

[114] Sturrock, P.A. (1971) Astrophys. J. 164,529.

[115] Svestka, Z. (1976) "Solar Flares" (Dordrecht: Reidel)

[116] Svestka, Z. (1981) "Flare Observations" en "Solar

Flare MHD" Ed. E.R. Priest (New York: Gordon

and Breach) p. 47.

[117] Taylor, J.H. y Manchester, R.N. (1977) Ann. Rev.

Astron. Astrophys. 15,19.

[118] Thode, L.E. y Sudan, R.N. (1975) Phys. Fluids 18,1552

----- (1975) Phys. Fluids 18,1564.

[119] Thomson, J.J., Faehl, R.J. y Krue, W.L. (1973)

Phys. Rev. Letters 31,918.

[120] Thomson, J.J., Faehl, R.J., Krue, W.L. y Bodner, S.

(1974) Phys. Fluids 17,973.

[121] Tsytoich, V.N. (1967) Sov. Phys. Usp. 9(6),805.

- [122] Tsytovich, V.N. (1970) "Non Linear Effects in Plasma"
(New York: Plenum)
- [123] Tsytovich, V.N. (1977) "Theory of Turbulent Plasma"
(New York: Consultants Bureau)
- [124] Tsytovich, V.N. (1980) Sov. J. Plasma Phys. 6, 608.
- [125] Tsytovich, V.N. y Kaplan, s.A. (1972) Astrophys.
B, 260.
- [126] Tsytovich, V.N., Stenflo, J. y Wilhelmson, H. (1975)
Phys. Scripta 11, 251.
- [127] Valeo, E. J. y Krueer, W.L. (1974) Phys. Rev.
Letters 33, 750.
- [128] Verga, A.D. y Ferro Fontan, C. (1984) Phys. Letters
A101, 494.
- [129] Verga, A.D. y Ferro Fontan, C. (1984) IAFE Preprint
- [130] Wheeler, J.A. (1966) Ann. Rev. Astron. Astrophys. 4, 393.
- [131] Woltjer, L. (1964) Astrophys. J. 140, 1309.
- [132] Zakharov, V.E. (1972) Sov. Phys. JETP 35, 908.
- [133] Zeldovich, Y.B. (1964) Doklady Ac. Nauk USSR 155, 67.
- [134] Jones, P.B. (1980) Mont. Not. R. Astron. Soc. 192, 847.
- [135] DuBois, D.F. (1976) Phys. Fluids 19, 1764.
- [136] DuBois, D.F. y Espedal, M. (1978)
Plasma Phys. 20, 1209.
- [137] DuBois, D.F. (1981) Phys. Rev. A23, 865.
- [138] DuBois, D.F. y Rose, H.A. (1981) Phys. Rev. A24, 1476.
- [139] Pelletier, G. (1977) J. Plasma Phys. 18, 49.

[140] Pelletier, G. (1980) J. Plasma Phys. 24, 287 y 421.

[141] Mikhailovskii, A. B. (1979) Sov. Astron. Lett. 5, 323

FIGURAS

- Fig. 1.1 a) Pulso de PSR 0532 (Cangrejo). Se observe una coincidencia entre los pulsos a distintas frecuencias entre radio y rayos gamma.
- b) Pulso de PSR 0833 (Vela). Mientras la emision de radio es coherente con temperaturas de brillo de alrededor de 10^4 K, la emision de alta frecuencia puede explicarse por mecanismos incoherentes tipo bremsstrahlung.
- Fig. 1.2 Fotografia tomada con camara de television en el rango optico del pulsar del Cangrejo, cuyo periodo es 0.033 s.
- Fig. 1.3 Espectros de la radioemision de los pulsars. PSR 0950 y PSR 1133 tienen espectros de potencias con un corte superior cerca de 1 GHz, y no muestran cortes a bajas frecuencias.
- Fig. 1.4 A pesar de la enorme variabilidad de los pulsos individuales, el pulso promedio formado por la superposicion de cientos de subpulsos, resulta estable. Obsérvese la complejidad de los pulsos individuales.
- Fig. 1.5 Pulsos promedio de distintos pulsars ordenados segun periodos crecientes.
- Fig. 1.6 Parametros de Stokes y angulo de posicion de la polarizacion del pulso de PSR 0525. I: intensidad total, L: polarizacion longitudinal, V: polarizacion circular. La rotacion del angulo de posicion es un efecto geometrico producido por el movimiento de la fuente segun las lineas curvas de campo magnetico, cambiando su orientacion respecto de la linea de vision.
- Fig. 1.7 Modelo del cono hueco de Radhakrishnan y Cooke (1969).
- a) Camino de la linea de vision a traves de las lineas de campo magnetico.
- b) Geometria del pulsar, la emision se produce cerca de las polos magneticos, cuyo eje esta inclinado respecto del eje de rotacion.
- 1.8 Deriva de los subpulsos sucesivos en PSR 2016. Este fenomeno puede estar asociado al mecanismo de emision de pares cerca de la cascara polar, que a su vez resulta el suministro de plasma a la

microteoría

Fig. 1.9 Magnetofera de Goldreich y
Lichten [45]. El eje de rotación y el eje magnético
son diferentes cilindros; θ es el ángulo de la
línea de campo, la cual es tangente al
cilindro de luz. Por las líneas de campo abiertas
se crean corrientes, produciéndose un viento de
partículas residuas [80].

Fig. 1.10 Magnetofera de Ruderman y Sutherland [104].
En la I se aceleran partículas a partir de las
II, III y IV, dando una cascada de formación de pares.

Fig. 1.11 Diagrama de electrones y positrones en la
teoría de Ruderman y Sutherland.

Fig. 1.12 Magnetofera de Arons y Scharlemann [5].

Fig. 2.1 Espectro de excitación de un plasma isotropo.
I: transversales; II: longitudinales (Langmuir),
III: Alfvén [123].

Fig. 2.2 Espectro del condensado de Langmuir.
I: I. Región de excitación turbulenta de Langmuir,
II: II. Región de excitación [62].

Fig. 2.3 Solitón de Langmuir acompañado de la
oscilación de densidad.

Fig. 2.4 Solitón de excitación de un plasma relativista.
I: Solitón de Alfvén.

Fig. 2.5 Diagrama de dispersión para la resolución de las
ecuaciones de Maxwell. Se consideran tres ondas
electromagnéticas E (onda de Langmuir) y
E (ondas de Alfvén).

Fig. 2.6 Soluciones de la ecuación 93.

Fig. 2.7 Soluciones tipo solitón.

Fig. 2.8 Espectro de los solitones en función del
momento. Las líneas llenas corresponden a solitones
I, II y III. A+ y A- representan las líneas de
Alfvén. Se ha representado la fusión de
solitones S1 y S2 en un tercero S3 mediante
solitón de ondas de Alfvén. El solitón fusionado
ubicarse en cualquier parte de la curva $m=3$
del caso de ondas de Alfvén con vertice
en A- S2.

Fig. 2.9 Espectro de la turbulencia fuerte de Langmuir.
I. Región de excitación; II. Región inercial;
III. Región de disipación.

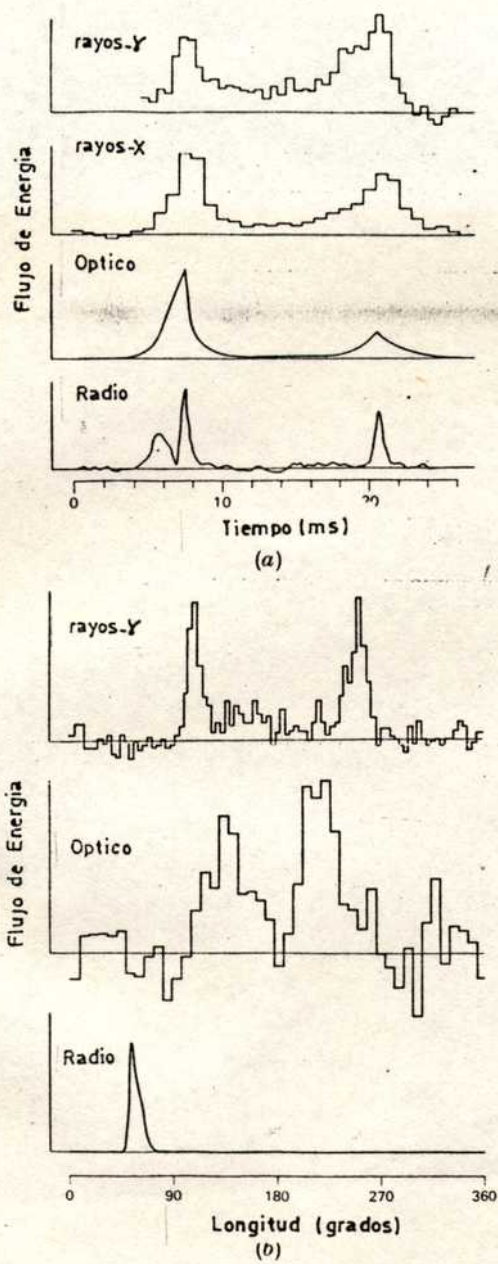
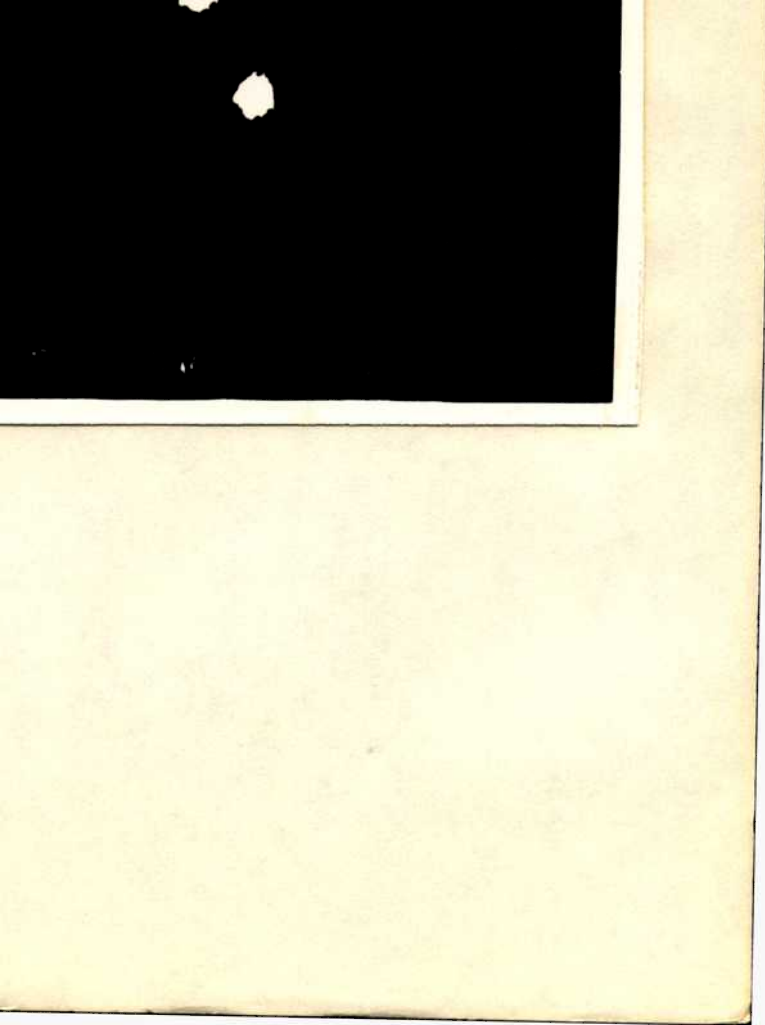


Fig. 1.1



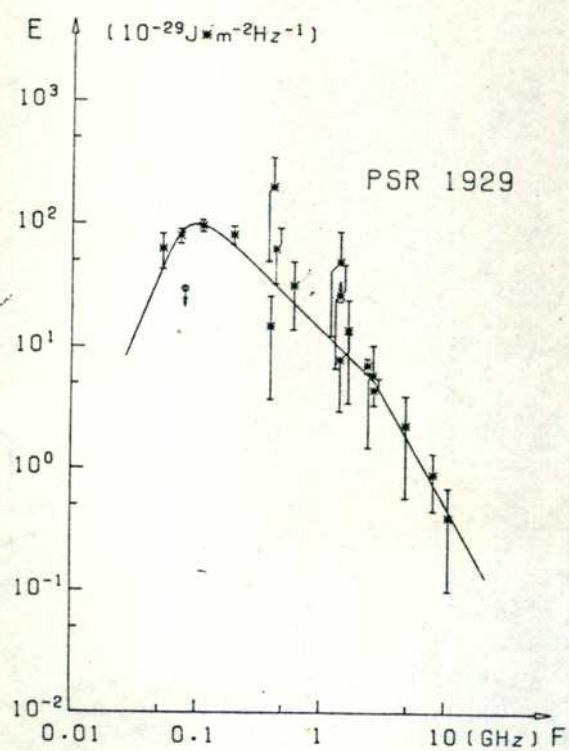
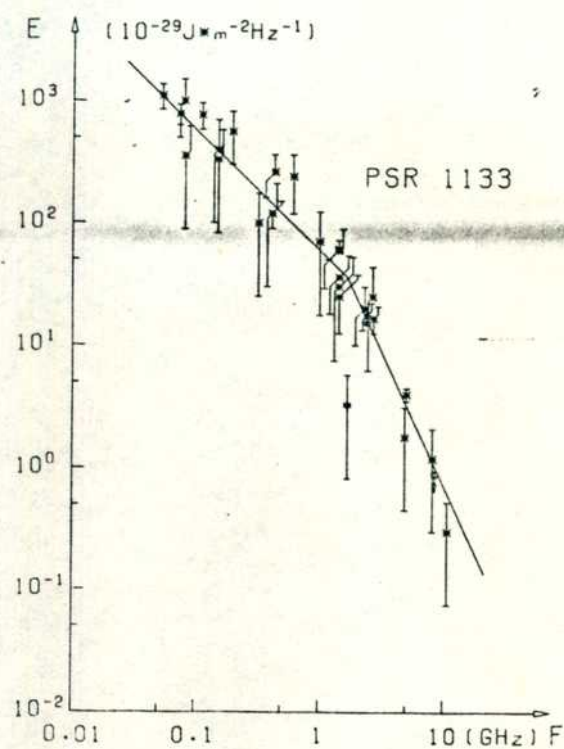
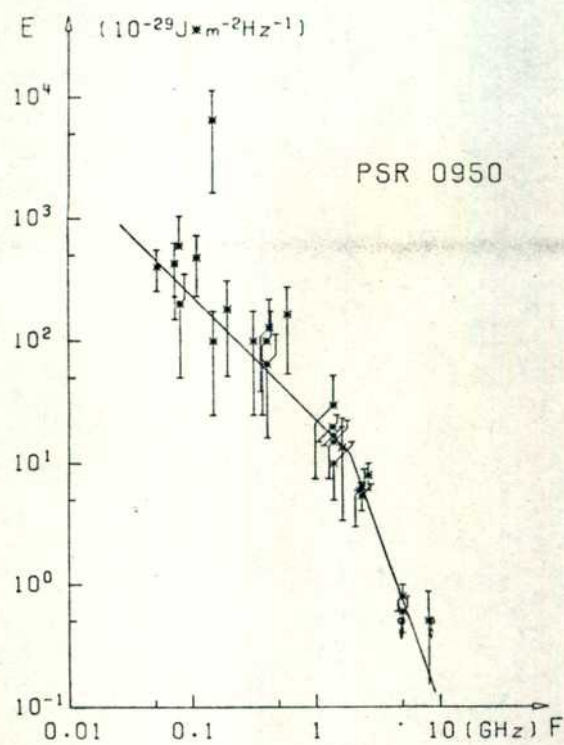


Fig. 1.3

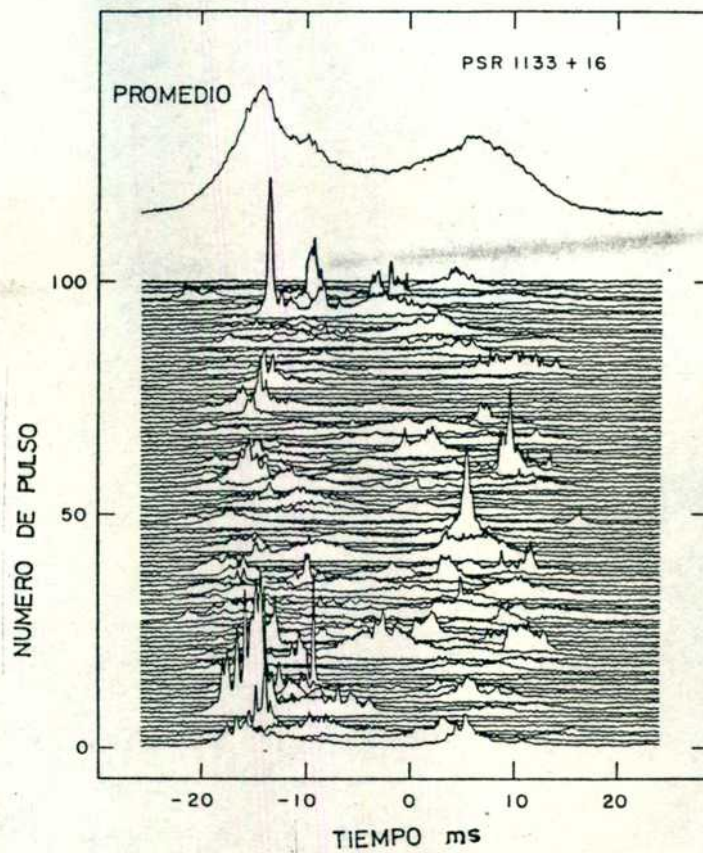


Fig. 1.4

4.4

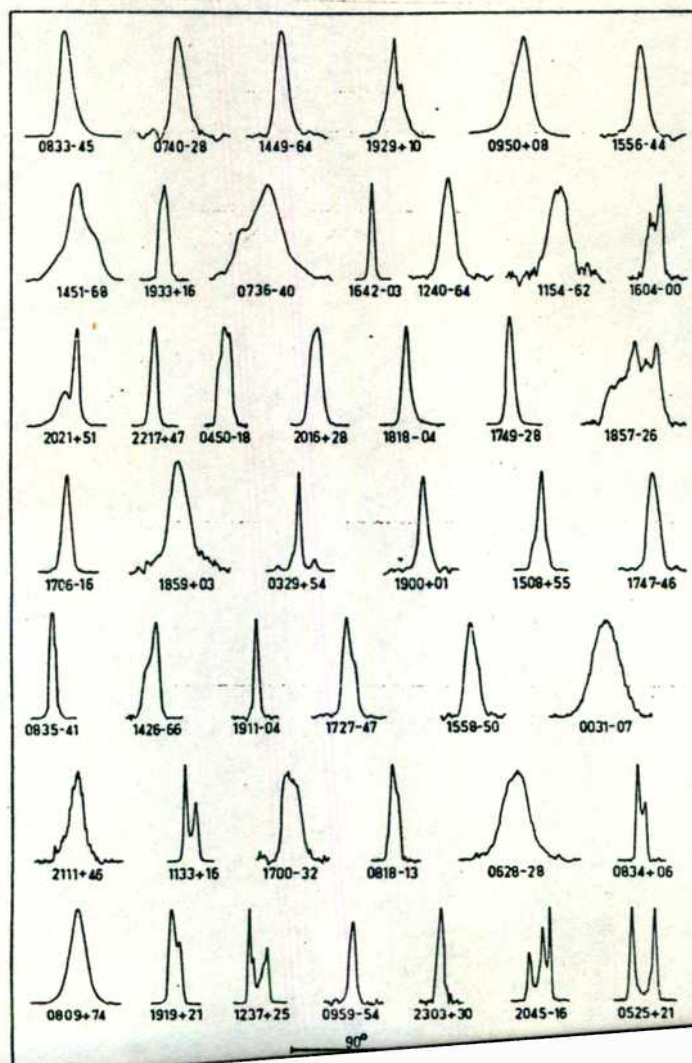


Fig. 1

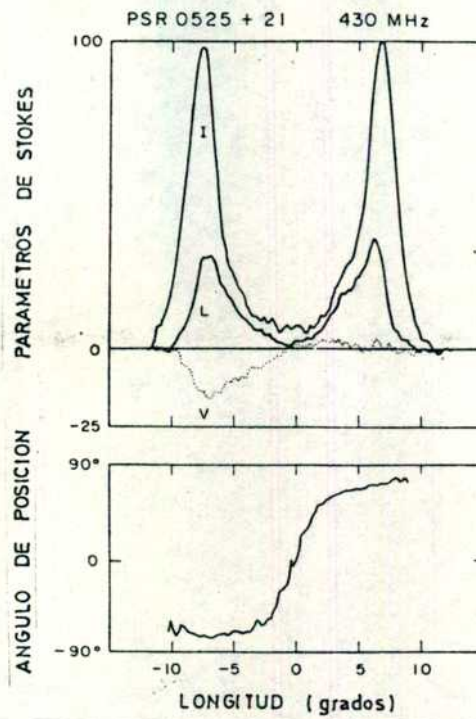


Fig. 1.6

1.6

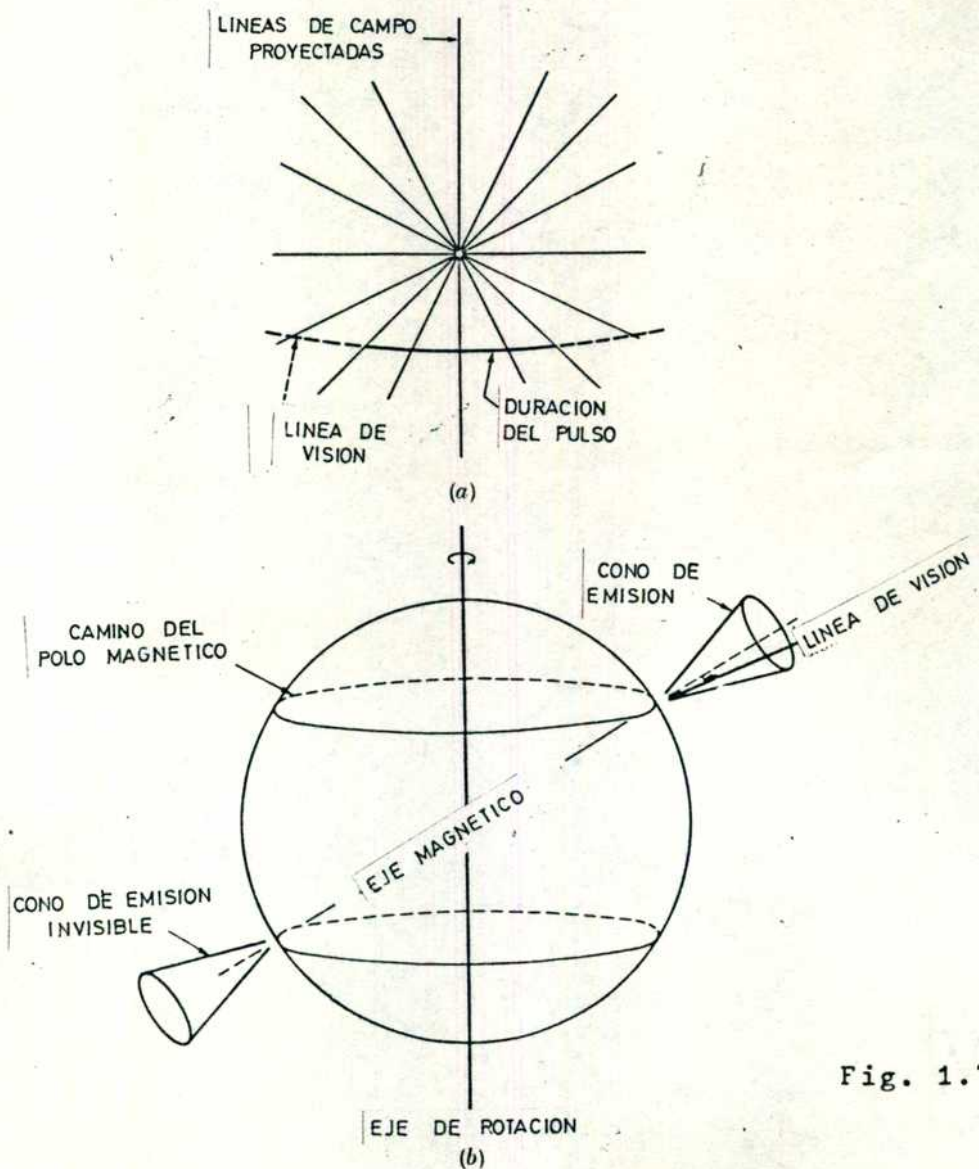


Fig. 1.7

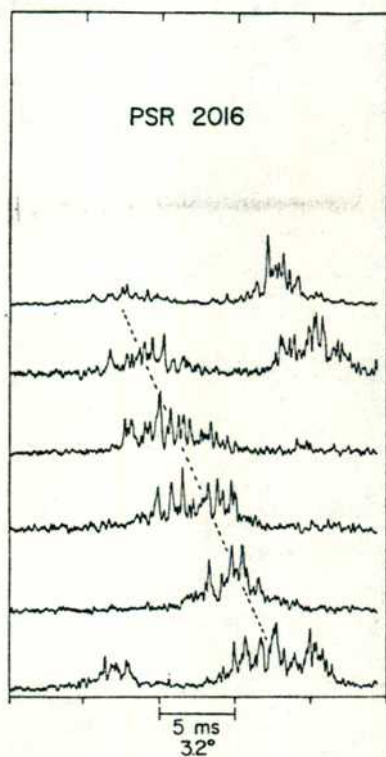


Fig. 1.8

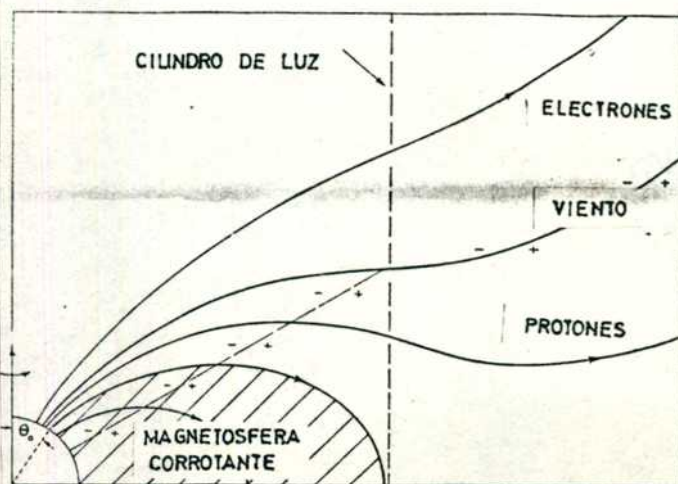


Fig. 1.9

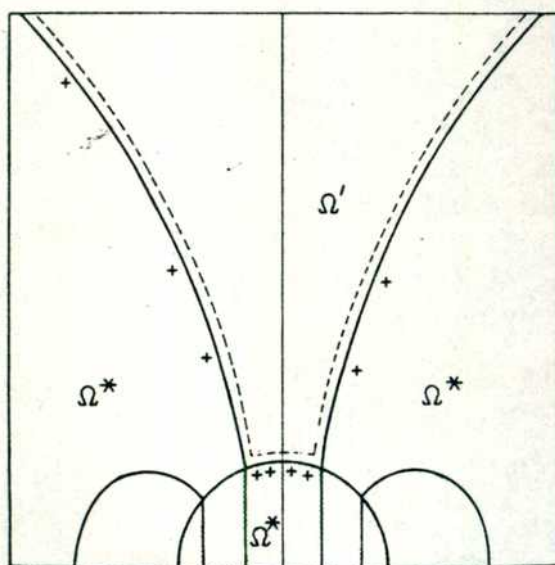


Fig. 1.10

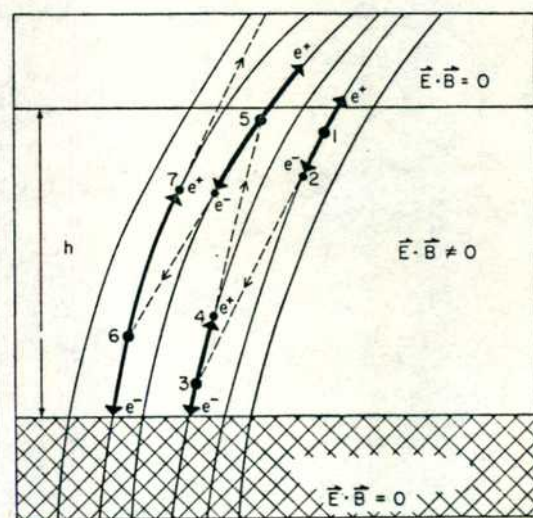


Fig. 1.11

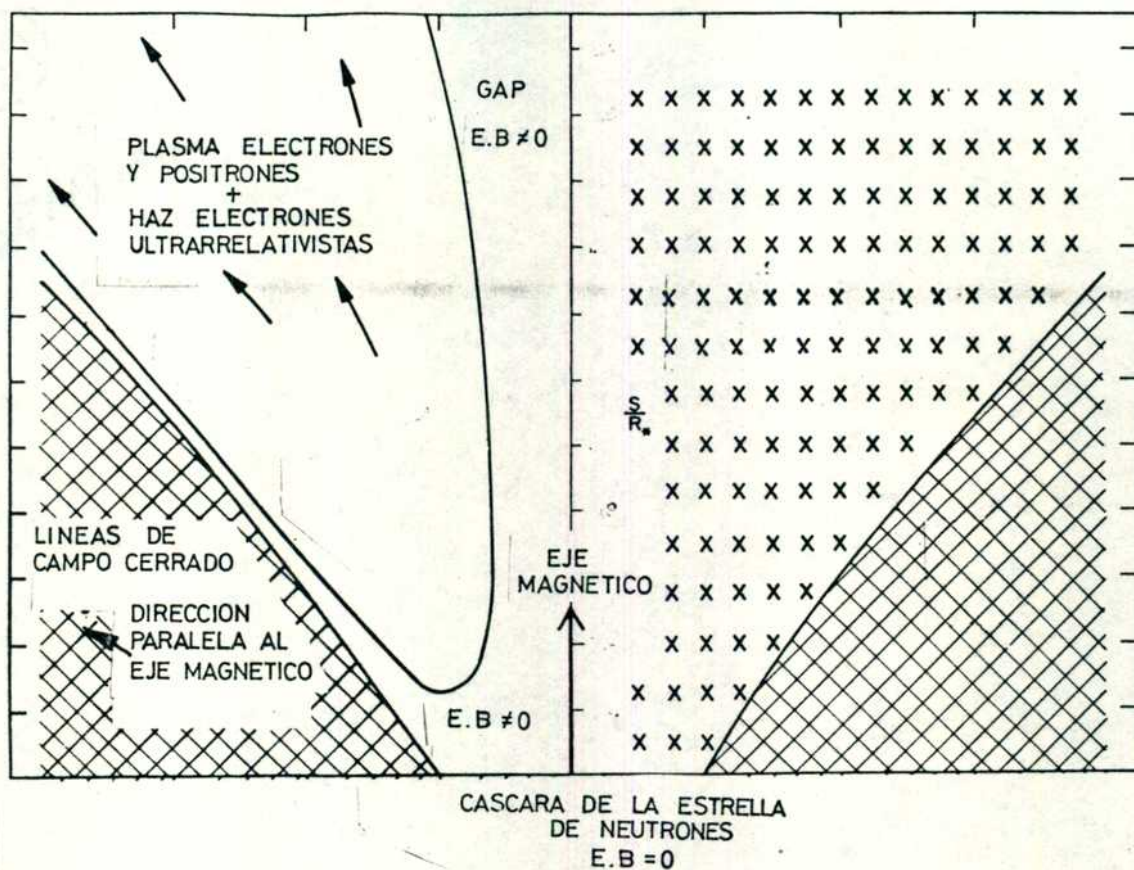


Fig. 1.12

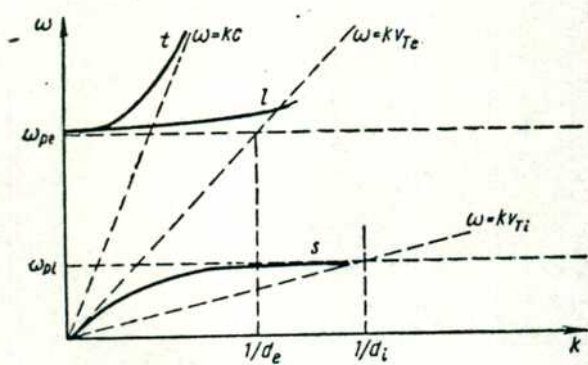


Fig. 2.1

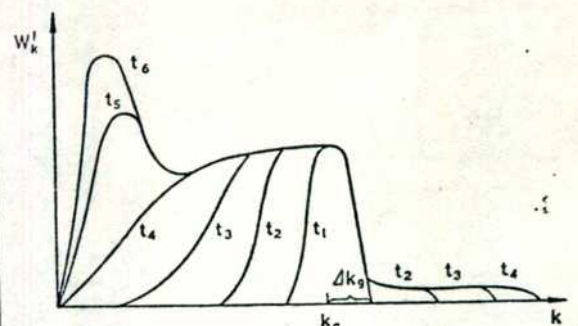


Fig. 2.2

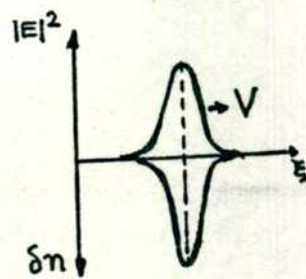


Fig. 2.3

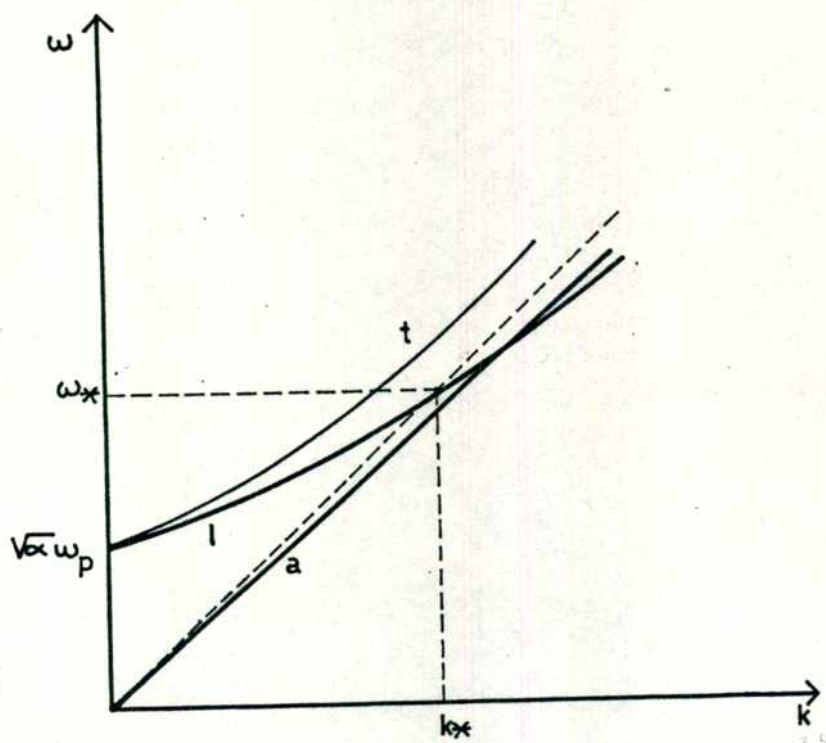


Fig. 2.4

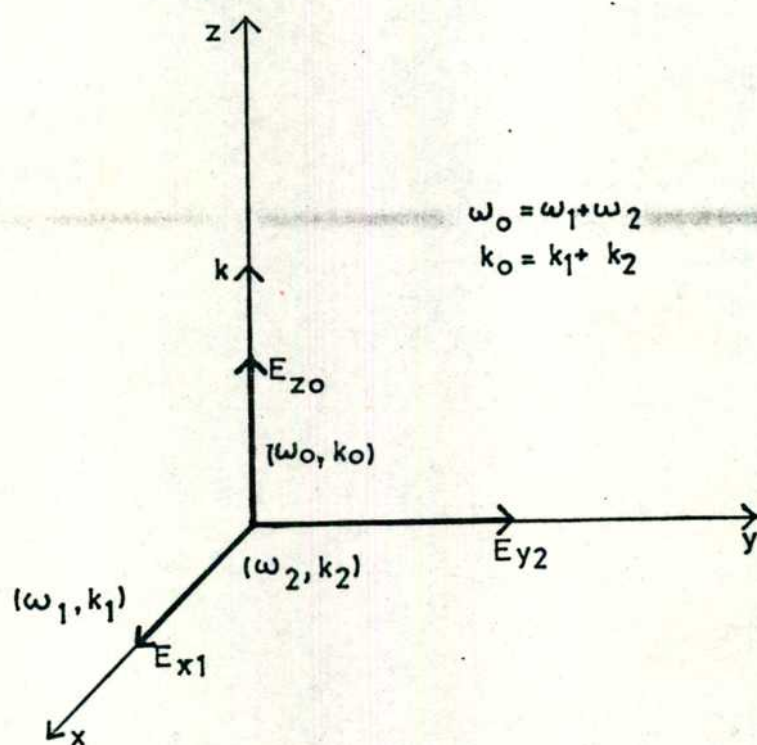


Fig. 3.1

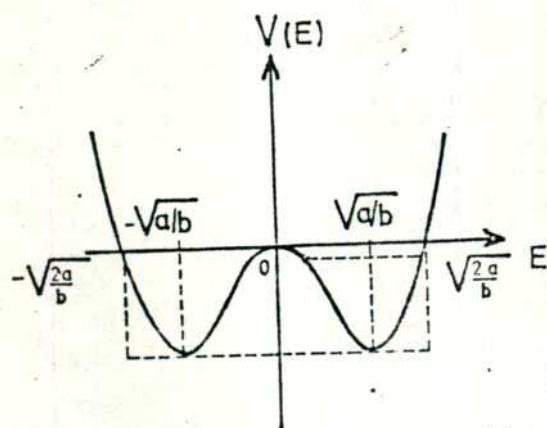


Fig. 3.2

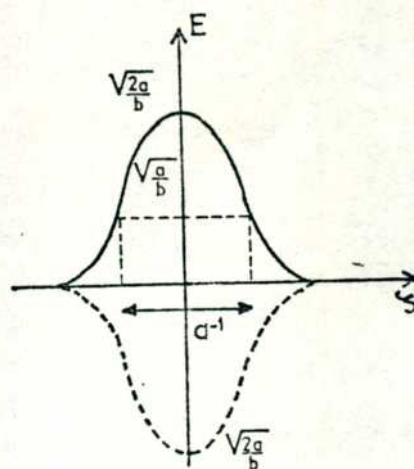


Fig. 3.3

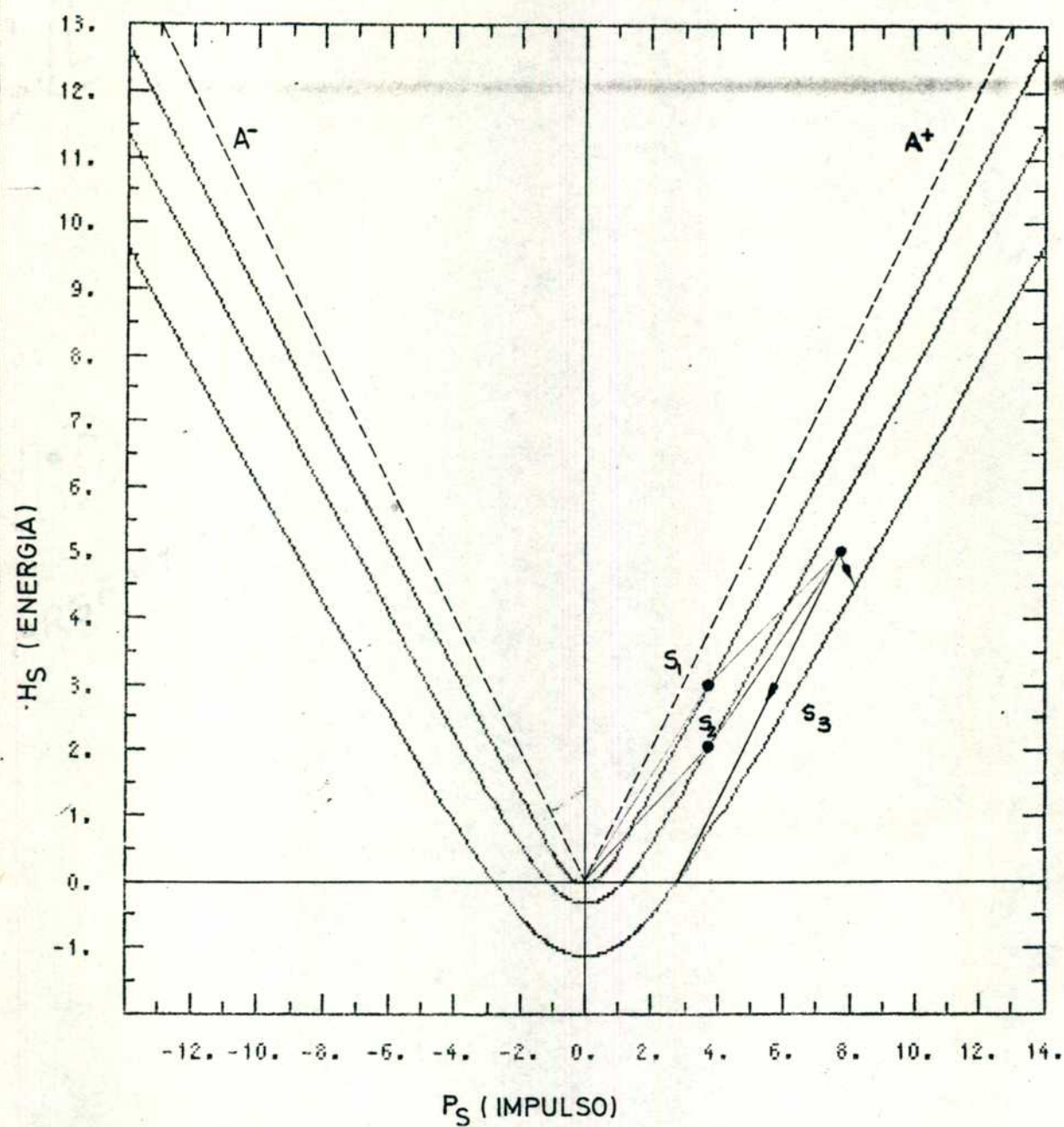


Fig. 4.1

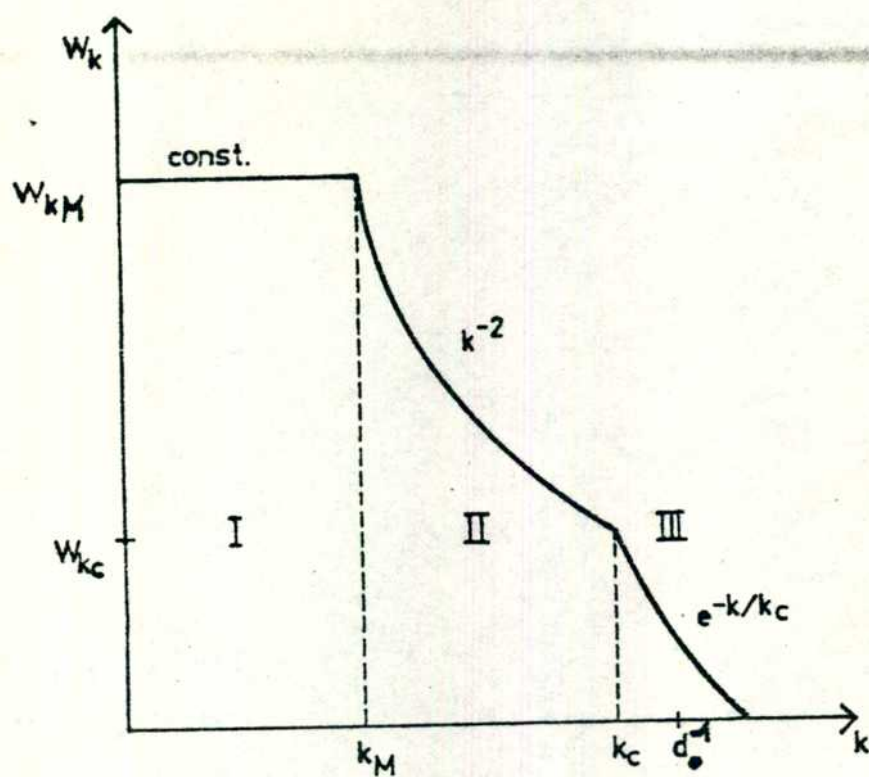


Fig. 5.1